Tutorium zur kommutativen Algebra SS17
SS17 Blatt 9

Ausgabe: 26.6.2017, **keine Abgabe**

Aufgabe T.9.1: Beantworten Sie jeweils mit Ja oder Nein, ob der angegebene Ringhomomorphismus endlich ist.
Falls ja, geben Sie explizite Erzeuger als Modul an und normierte Polynome, die die Ganzheit der Erzeuger belegen (im Sinne von Lemma 6.3 aus dem Skript).

1. $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$,
2. $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}[\sqrt{3}, \sqrt{3^2}, \sqrt{3^3}, \sqrt{3^4}, \ldots]$,
3. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}[\sin t, \cos t]$ (wir fassen beide Ringe als Unterringe von $C^\infty(\mathbb{R})$ auf),
4. $\mathbb{R}[\sin t] \to \mathbb{R}[\sin t, \cos t]$,
5. $\mathbb{R}[ST] \to \mathbb{R}[S, T]$,
6. $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ (als Unterringe von $\mathbb{Q}$),
7. $\mathbb{Z}[S, T] \to \mathbb{Z}[S, T]/(S^4 + T^2 - 1)$,
8. $\mathbb{Z}[T] \to \mathbb{Z}[S, T]/(S^4 + T^2 - 1)$,
9. $\mathbb{C}[T^2, T^3] \longrightarrow \mathbb{C}[T]$,
10. $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{p}, \ldots] \to \mathbb{Q}$, wobei p alle Primzahlen durchläuft.

Aufgabe T.9.2: Zeigen Sie, dass

1. das Element $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ganz über $\mathbb{Z}$ ist. Geben Sie ein normiertes Polynom an, welches dieses Element als Nullstelle besitzt.
2. das Element $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$ nicht ganz über $\mathbb{Z}$ ist.
3. das Element $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$ ganz über $\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe T.9.3:

1. Zeigen Sie, dass
$$\mathbb{C}[S, T] \longrightarrow B := \mathbb{C}[S, T, U]/(U^3 + ST)$$
ein endlicher Ringhomomorphismus ist.
2. Geben Sie eine explizite Basis von B als $\mathbb{C}[S, T]$-Modul an.

3. Geben Sie an, wie das Element $U+1$ als Matrix bezüglich der Basis aus (2) auf B wirkt.

4. Geben Sie ein Polynom an, welches belegt, dass $U+1$ ganz über $\mathbb{C}[S,T]$ ist.

Aufgabe T.9.4: Wir betrachten den endlichen Ringhomomorphismus

$$\mathbb{C}[Y] \longrightarrow \mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$$

1. Geben Sie die maximalen Ideale von $\mathbb{C}[Y]$ an.

2. Geben Sie die Primideale von $\mathbb{C}[Y]$ an.

3. Bestimmen Sie für jedes Primideal P in $\mathbb{C}[Y]$ alle Primideale P' in $\mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$ mit der Eigenschaft
$$P' \cap \mathbb{C}[Y] = P.$$
   Interpretieren Sie Ihre Antwort geometrisch.

Aufgabe T.9.5: Sei K ein Körper. Geben Sie ein Beispiel für einen endlichen Ringhomomorphismus $K \to E$, wobei E kein Körper ist.

Aufgabe T.9.6: Sei A noethersch und $A \to B$ ein endlicher Ringhomomorphismus. Beweisen Sie, dass B ganz über A ist.