Übungen zur Vorlesung "Kommutative Algebra"
SS17 Blatt 11

Ausgabe: 10.7.2017, **Abgabe:** 17.7.2017

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss17/kommalg/kommalg17.htm

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 11.1: Sei X eine affine Varietät und Z eine irreduzible Komponente von $V(f_1, \ldots, f_r)$, wobei $f_1, \ldots, f_r \in k[X]$. Beweisen Sie, dass

$$\dim X - \dim Z \leq r,$$

d.h. die Dimension von Z fällt höchstens um r im Vergleich zu X.

(2 Punkte)

Aufgabe 11.2: Es ist nicht immer offensichtlich, dass die Dimension um weniger als r Schritte fallen kann. Wir definieren

$$R := k[X, Y, W, Z] / \langle XW - YZ \rangle .$$

Zeigen Sie:

1. $\dim R = 3$ und geben Sie eine aufsteigende Idealkette von maximaler Länge an.
2. $\dim R / \langle W, Z \rangle = 2$.
3. $\dim R / \langle W, X \rangle = 1$.
4. Bestimmen Sie die irreduziblen Komponenten von $V(X, XW - YZ)$ und berechnen Sie ihre Dimension.

(6 Punkte)

Aufgabe 11.3: Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper von Charakteristik 0 und $c \in k$ fest gewählt. Sei weiter $A := k[X]$ und

$$B := k[X,Y]/(X^2 + Y^2 + c)$$

1. Zeigen Sie, dass die Inklusion $A \to B$ endlich ist.
2. Bestimmen Sie welche Voraussetzung für c gelten muss, damit B nullteilerfrei ist.
3. Berechnen Sie $Q(A)$ und $Q(B)$ und bestimmen Sie, wie in Lemma 6.19, das Polynom F für die Elemente
$$b_1 := X \qquad b_2 := Y \qquad b_3 := X + Y.$$
4. Berechnen Sie ebenso die Matrix der $Q(A)$-linearen Abbildungen $Q(B) \to Q(B)$, die zu den b_i gehören. Geben Sie jeweils $\det(b_i)$ und s (wie in Lemma 6.19) an. Beachten Sie, dass s von i abhängt.

(5 Punkte)

Aufgabe 11.4: *(Allgemeine Form des Satzes von Cayley–Hamilton)* Sei R ein Ring. Sei I ein Ideal in R und M ein von m Elementen erzeugter R-Modul. Dann gilt, dass für jeden Endomorphismus φ von M mit

$$\varphi(M) \subseteq IM$$

ein normiertes Polynom $F \in R[T]$ existiert,

$$F(T) = T^m + a_1 T^{m-1} + \cdots + a_m$$

mit $a_j \in I^j$ und $F(\varphi) = 0$. Wir beweisen dies in den folgenden Schritten:

1. Interpretieren Sie M als $R[T]$-Modul, indem Sie $T \cdot x = \varphi(x)$ für alle $x \in M$ definieren.
2. Sei A eine $(n \times n)$-Matrix mit Einträgen aus R. Wir wollen im Folgenden ohne Beweis benutzen, dass A stets eine sog. *Adjunkte* besitzt, eine Matrix $\mathrm{adj}(A)$ mit der Eigenschaft
$$\mathrm{adj}(A) \cdot A = A \cdot \mathrm{adj}(A) = \det(A) \cdot \mathbb{I},$$
wobei $\mathbb{I}$ die $(n \times n)$ Identitätsmatrix bezeichnet, "$\cdot$" die übliche Matrix-Multiplikation und die Determinante über die übliche Leibniz-Formel berechnet wird.
3. Seien $x_1, \ldots, x_m$ Erzeuger von M. Stellen Sie ein geeignetes lineares Gleichungssystem
$$\sum_{j=1}^{m} (\delta_{ij} T - a_{ij}) x_j = 0$$
auf, wobei δ_{ij} das Kronecker-Delta bezeichnet. Nutzen Sie die adjunkte Matrix, um zu folgern, dass
$$\det\left(T \cdot \mathbb{I} - (a_{i,j})_{1 \le i,j \le m}\right) \cdot x = 0$$
für alle $x \in M$ gilt.

4. Nutzen Sie die Leibniz-Formel für die Determinante, um F zu konstruieren.

(5 Punkte)

Bonus-Aufgabe 11.5: Finden Sie eine Literaturquelle, die die Adjunkte aus Aufgabe 11.4 in der von uns benötigten Allgemeinheit konstruiert.

(3 Punkte)

Bonus-Aufgabe 11.6: Geben Sie einen neuen Beweis des Lemmas von Nakayama (siehe Tutorium T.10.4) an, indem Sie nutzen, dass sobald

$$I \cdot M = M$$

gilt, schon $\varphi = \mathrm{id}$ die Voraussetzungen des Satzes von Cayley–Hamilton erfüllt.

(3 Punkte)