Übungen zur Vorlesung "Kommutative Algebra"
SS17 Blatt 3

Ausgabe: 8.5.2017, **Abgabe:** 15.5.2017

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss17/kommalg/kommalg17.htm

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 3.1: Zeigen Sie, dass

$$I = (x^2 + 3xy, y^2 + 3xy)$$

kein reduziertes Ideal in $k[x, y]$ ist.
(Tipp: $x + y$)

(3 Punkte)

Aufgabe 3.2:

1. Sei $V \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ eine Teilmenge, die in der üblichen Normtopologie von $\mathbb{C}^2$ dicht ist. Zeigen Sie, dass sie auch in der Zariski-Topologie dicht liegt.

2. Geben Sie ein Beispiel für eine Zariski-dichte Teilmenge, die in der üblichen Normtopologie von $\mathbb{C}^2$ diskret ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 3.3: Wir geben $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ die Zariski-Topologie. Zeigen Sie, dass $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ mit der Zariski-Topologie *nicht* mit der Produkt-Topologie von $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ übereinstimmt.

Hinweis: Die Produkt-Topologie hat die folgende Definition: Seien X_1, X_2 topologische Räume. Die Produktmenge $X_1 \times X_2$ hat die Projektionen $p_i : X_1 \times X_2 \to X_i$, $(x_1, x_2) \mapsto x_i$. Die Produkt-Topologie ist die einzige Topologie auf $X_1 \times X_2$, die die folgende Eigenschaft besitzt: Für jeden topologischen Raum A ist die natürliche Abbildung von

$$\{g \mid g : A \to X_1 \times X_2 \text{ stetig}\} \to \{(f_1, f_2) \mid f_i : A \to X_i \text{ stetig für } i = 1, 2\}$$
$$g \mapsto (p_1 \circ g, p_2 \circ g)$$

eine Bijektion.

(5 Punkte)

Aufgabe 3.4: Die Vereinigung

$$\mathbb{C}[t_1, t_2, \ldots] := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{C}[t_1, \ldots, t_n]$$

(innerhalb des Rings aller Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$) ist ein Ring und ist *nicht* noethersch.
Tipp: Das von $t_1, t_2, \ldots$ erzeugte Ideal ist interessant.

(6 Punkte)