Übungen zur Vorlesung "Kommutative Algebra"
SS17 Blatt 4

Ausgabe: 15.5.2017, **Abgabe:** 22.5.2017

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss17/kommalg/kommalg17.htm

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 4.1: Sei A ein Ring, M ein A-Modul. Seien $M_1, M_2 \subset M$ noethersche Moduln und Untermoduln von M. Zeigen Sie, dass der Schnitt $M_1 \cap M_2$ (bzw. $M_1 + M_2$) noethersche Untermoduln von M sind.

(2 Punkte)

Aufgabe 4.2: Sei A ein Ring. Die Menge

$$A[[X]] := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_i X^i \,\middle|\, a_i \in A \right\},$$

mit formaler Multiplikation und Addition, definiert einen Ring (siehe Tutorium 1).

Imitieren Sie den Beweis von Hilberts Basissatz um die folgende Aussage zu beweisen: Ist A noethersch, so ist $A[[X]]$ noethersch.

(Tipp: Anstatt Polynome nach dem höchsten Grad zu filtrieren, lohnt es sich hier, sie nach der niedrigsten auftretenden X-Potenz zu filtrieren)

(6 Punkte)

Aufgabe 4.3: Sei A ein Ring und M ein noetherscher A-Modul. Wir bezeichnen

$$\mathrm{ann}_A(M) := \{a \in A \mid am = 0 \text{ für alle } m \in M\}$$

als *Annihilator* von M. Sei $\mathrm{ann}_A(M) = 0$.

1. Konstruieren Sie eine injektive Abbildung von A-Moduln

$$A \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} M$$

für n geeignet groß.

2. Folgern Sie, dass A ein noetherscher Ring ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 4.4: Beweisen Sie: Sei A ein Ring. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- Alle Ideale sind endlich erzeugt, d.h. A ist noethersch.
- Alle Primideale sind endlich erzeugt.

Wir gehen wie folgt vor:

1. Seien alle Primideale endlich erzeugt. Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Ideale in A, die nicht endlich erzeugt sind. Existiert in $\mathcal{F}$ ein maximales Element P?
2. Wählen Sie $a, b \notin P$ mit $ab \in P$. Folgern Sie, dass $P + (a)$ endlich erzeugt ist:
$$P + (a) = \langle x_1, \dots, x_n, a \rangle$$
für geeignete $x_1, \dots, x_n \in P$.
3. Betrachten Sie $I := \{r \in A \mid rb \in P\}$.

(6 Punkte)