Übungen zur Vorlesung "Kommutative Algebra"
SS17 Blatt 5

Ausgabe: 22.5.2017, **Abgabe:** 29.5.2017

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss17/kommalg/kommalg17.htm

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 5.1: Wir betrachten die Verschwindungsmenge des Ideals

$$I := (x^2 - yz, xz - x)$$

in $k[x, y, z]$. Zerlegen Sie $V(I)$ in seine irreduziblen Komponenten.

(4 Punkte)

Aufgabe 5.2: ("Das Bild unter polynomialen Abbildungen ist irreduzibel") Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper[1]. Seien $f_1, \ldots, f_n \in k[X_1, \ldots, X_m]$ gegeben für $m \leq n$ und wir definieren

$$A := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n \mid \exists t_1, \ldots, t_m \in k^m \text{ mit } x_i = f_i(t_1, \ldots, t_m) \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$$

und betrachten den Zariski-Abschluss $V := \overline{A}$ in $\mathbb{A}^n$.

1. Definieren Sie ein Ideal
$$I := \{g \in k[X_1, \ldots, X_n] \mid g(f_1, \ldots, f_n) = 0\}.$$
Zeigen Sie, dass $I = I(V)$.
2. Zeigen Sie, dass V irreduzibel ist.
3. Folgern Sie, dass $\{(t, t^2, t^3) \in \mathbb{A}^3 \mid t \in k\}$ irreduzibel ist.
4. Zeigen Sie, dass alle Untervektorräume von $\mathbb{A}^n$ (wenn wir den affinen Raum als Vektorraum k^n interpretieren) irreduzibel sind.

(5 Punkte)

---

[1] Tatsächlich genügt: k hat unendlich viele Elemente.

Aufgabe 5.3: Sei A ein Ring und M ein noetherscher A-Modul.

1. Wir definieren $\tilde{A} := A/\operatorname{ann}_A(M)$. Zeigen Sie, dass M auch als $\tilde{A}$-Modul aufgefasst werden kann. Zeigen Sie, dass die A-Untermoduln von M als A-Modul genau die $\tilde{A}$-Untermoduln von M als $\tilde{A}$-Modul sind.

2. Folgern Sie, dass M ebenfalls noethersch als $\tilde{A}$-Modul ist.

3. Berechnen Sie $\operatorname{ann}_{\tilde{A}}(M)$. Folgern Sie, dass $\tilde{A}$ ein noetherscher Ring ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 5.4: Sei A ein noetherscher Ring. Zeigen Sie, dass jeder surjektive Ringhomomorphismus $f : A \to A$ bereits ein Isomorphismus sein muss. Gilt dies auch falls A nicht noethersch ist? Beweis oder Gegenbeispiel.
(Betrachten Sie die Kerne der Potenzen $f^{\circ n}$ für größer werdende n)

(4 Punkte)