Übungen zur Vorlesung "Kommutative Algebra" SS17 Blatt 6

Ausgabe: 29.5.2017, **Abgabe:** 12.6.2017

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss17/kommalg/kommalg17.htm

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 6.1: Sei k ein Körper. Sei

$$R := k[x_1, x_2], \quad S := k[y, z], \quad T := k[y, z, t]/(ty - 1)$$

und wir definieren einen Ring-Homomorphismus

$$f : R \to S \qquad x_1 \mapsto y \qquad x_2 \mapsto zy.$$

1. Zeigen Sie, dass f kein Isomorphismus von Ringen ist, obwohl R und S isomorphe Ringe sind.
2. Zeigen Sie, dass f einen Isomorphismus von Quotientenkörpern $Q(R) \to Q(S)$ induziert.
3. Zeigen Sie, dass T nullteilerfrei ist.
4. Zeigen Sie, dass der natürliche Ring-Homomorphismus $g : S \to T$ injektiv ist. Zeigen Sie, dass er wiederum einen Isomorphismus von Quotientenkörpern $Q(S) \to Q(T)$ definiert.

(5 Punkte)

Aufgabe 6.2: Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $V \subset \mathbb{A}^n$ eine affine Varietät.

1. Konstruieren Sie eine natürliche Bijektion zwischen den irreduziblen Komponenten von V und den minimalen Primidealen von $\mathcal{O}(V)$.
2. Wir verfeinern die Aussage: Sei $x \in V$ ein Punkt. Konstruieren Sie eine natürliche Bijektion zwischen den irreduziblen Komponenten von V, die den Punkt x enthalten, und den minimalen Primidealen des lokalen Rings $\mathcal{O}(V)_{I(\{x\})}$.

(5 Punkte)

Aufgabe 6.3: Sei V eine affine Varietät. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. V ist *nicht* zusammenhängend als topologischer Raum (in der Zariski-Topologie).

2. Es gibt Ringe R_1, R_2 mit $\mathcal{O}(V) = R_1 \times R_2$, wobei weder in R_1 noch R_2 die Gleichung $0 = 1$ gilt.

3. Es existiert ein Element $e \in \mathcal{O}(V)$ mit $e \neq 0$, $e \neq 1$ und $e^2 = e$.

Elemente wie e nennt man eine *nicht-triviale Idempotente*.

(6 Punkte)

Aufgabe 6.4: Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ in der Norm-Topologie. Sei

$$C(X, \mathbb{R}) := \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

die Menge der stetigen reellwertigen Funktionen auf X.

1. Zeigen Sie, dass $C(X, \mathbb{R})$ ein Ring ist.

2. Für jeden Punkt $x \in X$ sei $I_x \subset C(X, \mathbb{R})$ die Menge aller Funktionen mit $f(x) = 0$. Zeigen Sie, dass I_x ein maximales Ideal ist.

3. Zeigen Sie, dass jedes maximale Ideal in $C(X, \mathbb{R})$ von der Form I_x für einen geeignet gewählten Punkt $x \in X$ ist.

4. Zeigen Sie, dass für $x, y \in X$ mit $x \neq y$ auch $I_x \neq I_y$ gilt.

5. Konstruieren Sie eine Bijektion zwischen den maximalen Idealen von $C(X, \mathbb{R})$ und den Punkten von X.

(Die Aussagen gelten unverändert falls X ein beliebiger kompakter Hausdorff-Raum ist; der Beweis wird allerdings schwieriger.)

(6 Punkte)