Übungen zur Vorlesung "Kommutative Algebra"
SS17 Blatt 7

Ausgabe: 12.6.2017, **Abgabe:** 19.6.2017

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss17/kommalg/kommalg17.htm

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 7.1: Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Eine *Gerade* in $\mathbb{P}^2(K)$ ist die durch ein homogenes Polynom von Grad 1 definierte algebraische Teilmenge. Konkret sprechen wir also von

$$V(aX_0 + bX_1 + cX_2),$$

wobei a, b, c nicht alle simultan null sein dürfen.

1. Zeigen Sie, dass zwei Geraden in $\mathbb{P}^2(K)$ entweder gleich sind, oder sich in genau einem Punkt schneiden.
2. Konstruieren Sie eine Bijektion zwischen der Menge der Geraden in $\mathbb{P}^2(K)$ und der Menge der Punkte in $\mathbb{P}^2(K)$.

(4 Punkte)

Aufgabe 7.2: Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Wir betrachten den projektiven Raum $\mathbb{P}^n(K)$. Geben Sie mittels der Bijektion $\phi_i : U_i \longrightarrow K^n$ jeder standardaffinen Karte die Struktur eines topologischen Raums, wobei wir K^n mit der Norm-Topologie versehen. Für alle $0 \leq i \leq j \leq n$ bezeichnet man

$$\tau_{i,j} := \phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \phi_j(U_j \cap U_j)$$

als *Übergangsabbildung.*

1. Für $K = \mathbb{R}$, zeigen Sie, dass die Übergangsabbildungen glatt sind. Folgern Sie, dass es eine eindeutig bestimmte Topologie auf $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ gibt, sodass alle ϕ_i Homöomorphismen sind. Wir nennen sie die *reelle Topologie* auf $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.
2. Konstruieren Sie analog eine kanonische Topologie auf $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, indem Sie $\mathbb{C}$ als 2-dimensionalen reellen Vektorraum auffassen. Wir sprechen von der *komplexen Topologie* auf $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.
3. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}^n(K)$ mit diesen Topologien jeweils ein Hausdorff-Raum ist.

4. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}^n(K)$ mit diesen Topologien jeweils zusammenhängend ist.
5. Zeigen Sie, dass die in der Zariski-Topologie von $\mathbb{P}^n(K)$ abgeschlossenen Teilmengen auch in der reellen bzw. komplexen Topologie abgeschlossen sind.

(5 Punkte)

Aufgabe 7.3: Sei $n \geq 2$. Wir betrachten die Quotientenabbildung

$$\begin{aligned} q : \mathbb{A}^n(\mathbb{R}) - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) \\ (x_0, \ldots, x_n) &\longmapsto [x_0 : \cdots : x_n]. \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, dass q in der reellen Topologie stetig ist.
2. In $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ liegt die Einheitssphäre
$$S^{n-1} := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| = 1\}.$$
Folgern Sie, dass die Komposition $S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{A}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ stetig und surjektiv ist.
3. Folgern Sie, dass $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ in der reellen Topologie kompakt ist.
4. Argumentieren Sie, dass auch $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ in der komplexen Topologie kompakt ist. (Tipp: Nutzen Sie die Sphäre S^{2n-1} in $\mathbb{R}^{2n}$)

(Wir erhalten auch einen zweiten Beweis, dass $\mathbb{P}^{n-1}$ in der reellen Topologie bzw. komplexen Topologie zusammenhängend ist.)

(5 Punkte)

Aufgabe 7.4: Zeigen Sie, dass der Raum $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ mit der komplexen Topologie homöomorph zur Sphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ ist.
(Tipp: Stereographische Projektion)

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 7.5: In der folgenden Aufgabe wollen wir Intuition sammeln und Sie dürfen mittels Skizzen argumentieren.

1. Zeigen Sie, dass es einen Homöomorphismus
$$S^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$$
gibt.
2. Nutzen Sie die surjektive Abbildung
$$S^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}),$$
um zu zeigen, dass $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ein Möbiusband enthält.
3. Erklären Sie anschaulich mittels einer Skizze, dass man in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ein orientiertes Koordinatensystem entlang einer Kurve in sein Spiegelbild überführen kann.

(die präzise Aussage ist: $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ist eine nicht-orientierbare Fläche)

(4 Punkte)