Übungen zur Vorlesung "Kommutative Algebra"
SS17 Blatt 8

Ausgabe: 19.6.2017, **Abgabe:** 26.6.2017

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss17/kommalg/kommalg17.htm

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 8.1: Sei

$$V = V(f_1, \dots, f_r)$$

eine in $\mathbb{A}^n$ definierte Varietät. Wir wollen den affinen Raum über eine standardoffene Menge in $\mathbb{P}^n$ einbetten,

$$V \hookrightarrow \mathbb{A}^n \cong U_0 \hookrightarrow \mathbb{P}^n$$

und den Zariski-Abschluss $\overline{V}$ in $\mathbb{P}^n$ bestimmen. Zeigen Sie, dass $\overline{V}$ als projektive Varietät durch die Homogenisierung der $f_1, \dots, f_r$ definiert wird.

(4 Punkte)

Aufgabe 8.2: Seien X, Y quasi-projektive Varietäten,

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i$$

eine offene Überdeckungen mit Indexmenge I, und $f_i : U_i \to Y$ Morphismen mit der Eigenschaft

$$f_i \mid_{U_i \cap U_j} = f_j \mid_{U_i \cap U_j}$$

für alle $i, j \in I$. Zeigen Sie, dass dann ein eindeutig bestimmter Morphismus $f : X \to Y$ existiert, der die Eigenschaft $f \mid_{U_i} = f_i$ für alle i besitzt.

(3 Punkte)

Aufgabe 8.3: Ein *graduierter Ring* ist ein Ring R, mitsamt Untergruppen $(R_i)_{i \geq 0}$ bezüglich der Addition, sodass

$$R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$$

als abelsche Gruppe gilt, und $R_i \cdot R_j \subseteq R_{i+j}$ für alle $i, j \geq 0$ unter Multiplikation (siehe Tutorium).

1. Sei $f \in R$. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Darstellung
$$f = \sum_{i \geq 0} f^{(i)}$$
gibt mit $f^{(i)} \in R_i$. Wir nennen $f^{(i)}$ den *homogenen Teil von Grad* i.

2. Ein Ideal I in R heißt *homogen* falls für alle $f \in I$ und $i \geq 0$ auch $f^{(i)} \in I$ gilt. Folgern Sie, dass ein Ideal I genau dann homogen ist falls es durch eine Menge homogener Elemente erzeugt wird.

3. Sei I ein homogenes Ideal. Zeigen Sie, dass der Quotient R/I selbst eine Struktur als graduierter Ring besitzt.

(5 Punkte)

Aufgabe 8.4: Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper[1] und $V \subset \mathbb{P}^n_k$ eine algebraische Menge. Wir definieren
$$I(V) := \{f \in k[X_0, \ldots, X_n] \mid f(x_0, \ldots, x_n) = 0 \text{ für alle } [x_0 : \cdots : x_n] \in V\}.$$

1. Zeigen Sie, dass diese Definition zu Definition 5.5 aus dem Skript äquivalent ist.

2. Zeigen Sie, dass $I(V)$ ein homogenes Ideal des graduierten Rings $k[X_0, \ldots, X_n]$ ist.

3. Zeigen Sie, dass
$$V(I(V)) = V.$$

(4 Punkte)

[1] Es würde genügen, dass k unendlich viele Elemente besitzt.

Bonus-Aufgabe 8.5: *(Projektiver Nullstellensatz)* Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Sei I ein homogenes Ideal im graduierten Ring $k[X_0, \ldots, X_n]$.

1. Zeigen Sie, dass $V(-)$ für die homogenen Ideale $S_+ := \langle X_0, \ldots, X_n \rangle$ sowie $\langle 1 \rangle$ übereinstimmt. Die naive Verallgemeinerung des Nullstellensatzes für projektive Räume ist daher nicht korrekt. Das Ideal S_+ heißt *irrelevantes Ideal.*

2. Beweisen Sie: *Falls* $V(I)$ *nicht leer ist*, so gilt der projektive Nullstellensatz:
$$I(V(I)) = \sqrt{I}.$$

3. Folgern Sie, dass das Radikal $\sqrt{I}$ ebenfalls ein homogenes Ideal ist.[2]

4. Folgern Sie, dass es eine ordnungs-umkehrende Bijektion
$$\left\{ \begin{array}{c} \text{nicht-leere projektive} \\ \text{Varietäten in } \mathbb{P}^n \end{array} \right\} \cong \left\{ \begin{array}{c} \text{reduzierte homogene Ideale in } k[X_0, \ldots, X_n] \\ \text{ungleich } S_+ \end{array} \right\}$$
gibt, die durch die projektiven Varianten von I und V gegeben ist.

Für diesen Beweis dürfen Sie den üblichen Nullstellensatz benutzen.

(5 Punkte)

(Tipp: Ist I ein homogenes Ideal, so nennen wir die Verschwindungsmenge von I, aber aufgefasst im affinen Raum $\mathbb{A}^{n+1}$ anstatt in $\mathbb{P}^n$, den *affinen Kegel* C der projektiven Varietät $V(I)$. Beweisen Sie zunächst, dass
$$I_{\mathbb{A}^n}(C) = I_{\mathbb{P}^n}(V),$$
wobei die tiefgestellten Angaben verdeutlichen, dass wir die Definition von I einmal im Sinne affine Varietäten und einmal im Sinne projektiver Varietäten nutzen.)

[2] Dies kann man auch ohne den Nullstellensatz beweisen. Insbesondere wird für diese Teilaussage nicht benötigt, dass k algebraisch abgeschlossen ist.