Übungen zur Vorlesung "Kommutative Algebra"
SS17 Blatt 9

Ausgabe: 26.6.2017, **Abgabe:** 3.7.2017

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss17/kommalg/kommalg17.htm

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 9.1: Betrachten Sie den Abschluss $\overline{X}$ der algebraischen Menge

$$X := V(X_2 - X_1^2, X_3 - X_1^3) \subset \mathbb{A}^3 \cong U_0$$

in $\mathbb{P}^3$. Zeigen Sie, dass das Komplement $\overline{X} \setminus U_0$ eine projektive Varietät ist und isomorph zu $\mathbb{P}^1$ ist.

Geben Sie alle Details dieses Beweises an.

(4 Punkte)

Aufgabe 9.2: Wir betrachten $Q := V(X_0X_3 - X_1X_2)$ in $\mathbb{P}^3$. Sei $p := [0 : 0 : 0 : 1]$.

1. Zeigen Sie, dass die Vorschrift $[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \mapsto [x_0 : x_1 : x_2]$ einen Morphismus $f : Q \setminus p \to \mathbb{P}^2$ definiert.
2. Wir betrachten $g : [x_0 : x_1 : x_2] \mapsto [x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1x_2]$. Bestimmen Sie die offene Teilmenge U von $\mathbb{P}^2$, auf der g einen Morphismus $g : U \mapsto Q$ definiert.
3. Bestimmen Sie die irreduziblen Komponenten von $\mathbb{P}^2 \setminus U$.
4. Bestimmen Sie die größte offene Menge in Q, auf der f einen Isomorphismus auf sein Bild definiert.

(5 Punkte)

Aufgabe 9.3: Wir definieren die *Segre-Einbettung*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m &\longrightarrow \mathbb{P}_k^{(n+1)(m+1)-1} \\ ([x_0 : \cdots : x_n], [y_0 : \cdots : y_m]) &\longmapsto [z_{0,0}, \cdots , z_{n,m}], \end{aligned}$$

wobei wir $z_{i,j} = x_i \cdot y_j$ setzen.

1. Zeigen Sie, dass diese Abbildung injektiv ist.

2. Zeigen Sie, dass das Bild eine projektive Varietät ist, indem Sie homogene Gleichungen angeben.

3. Zeigen Sie, dass das Bild von $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ in $\mathbb{P}^5$ alternativ wie folgt beschrieben werden kann: Die Punkte des Bildes sind genau jene Punkte $[z_0 : \cdots : z_5]$ so dass die Matrix
$$\begin{pmatrix} z_0 & z_2 & z_4 \\ z_1 & z_3 & z_5 \end{pmatrix}$$
Rang 0 oder 1 besitzt.

(5 Punkte)

Definition: Ein *pythagoräisches Zahlentripel* sind ganze Zahlen (a, b, c), die als die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks auftreten, $a^2 + b^2 = c^2$.

Aufgabe 9.4: Wir definieren eine Abbildung
$$V(X^2 + Y^2 - 1) \setminus \{(-1, 0)\} \longrightarrow \mathbb{A}^1$$
durch
$$t = \frac{y}{x+1}. \tag{1}$$

1. Zeigen Sie, dass diese Abbildung die stereographische Projektion des Kreises von $(-1, 0)$ auf die y-Achse beschreibt.

2. Zeigen Sie, dass sich die Abbildung zu einem Isomorphismus projektiver Varietäten $V(X^2 + Y^2 - Z^2) \longrightarrow \mathbb{P}^1$ fortsetzen lässt, wobei die Inverse für $t \neq \pm\sqrt{-1}$ durch
$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$y = \frac{2t}{1+t^2}.$$
gegeben ist.

3. Zeigen Sie, dass diese Abbildung rationale Koordinaten $[x : y : z]$ mit $x, y, z \in \mathbb{Q}$ auf rationale Koordinaten im $\mathbb{P}^1$ abbildet, und umgekehrt. Erklären Sie anhand dieser Beobachtung die folgende Aussage: Alle pythagoräischen Tripel (a, b, c) mit $\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(a, c) = \mathrm{ggT}(b, c) = 1$ sind von der Form $(2mn, n^2 - m^2, n^2 + m^2)$.

1995 hat Andrew Wiles bewiesen, dass es für $n \geq 3$ keine ganzen Zahlen $a, b, c > 0$ gibt, die $a^n + b^n - c^n = 0$ erfüllen, was eine seit 1637 unbewiesene Vermutung/Behauptung von Pierre de Fermat gewesen war.

(7 Punkte)

Bonus-Aufgabe 9.5: Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ isomorph zu Q aus Aufgabe 9.2 ist.

(2 Punkte)