Mathematisches Institut, Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter

Probeklausur: **"Lineare Algebra II" SS 2019**

Datum und Uhrzeit:	TODO
Prüfungsdauer:	3 Stunden
Raum:	TODO
Erlaubte Hilfsmittel:	1 handbeschriebenes DIN A4 Blatt
Prüfer:	Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Fach: ....

Studiengang: ☐ Bachelor ☐ Master ☐ Lehramt ☐ sonstiges

Unterschrift: ....

Anmerkungen:

- Füllen Sie dieses Deckblatt vollständig aus.
- Zusätzliche Blätter sind nur einseitig zu beschreiben.
- Zusätzliche Blätter sind mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Für jede Aufgabe ist eine neue Seite/Bogen zu beginnen.
- Mobiltelefone müssen ausgeschaltet werden.
- Elektronische Hilfsmittel (Taschenrechner,...) jeglicher Art sind **nicht** zugelassen.
- **Alle Ergebnisse sind zu begründen bzw. herzuleiten.**

Prüfungsunfähigkeit

Durch den Antritt dieser Prüfung erklären Sie sich für prüfungsfähig. Sollten Sie sich während der Prüfung nicht prüfungsfähig fühlen, können Sie aus gesundheitlichen Gründen auch während der Prüfung von dieser zurücktreten. Gemäß der Prüfungsordnungen sind Sie verpflichtet, die für den Rücktritt oder das Versäumnis geltend gemachten Gründe unverzüglich (innerhalb von 3 Tagen) dem Prüfungsamt durch ein Attest mit der Angabe der Symptome schriftlich anzuzeigen und glaubhaft zu machen. Weitere Informationen hierzu können auf den Internetseiten des Prüfungsamtes nachgelesen werden.

	Max. Anzahl Punkte	Erreichte Punkte	Bemerkung
Aufgabe 1	TODO		
Aufgabe 2	TODO		
Aufgabe 3	TODO		
Aufgabe 4	TODO		
Aufgabe 5	TODO		
Aufgabe 6	TODO		
Summe:	**TODO**		

Note: ....

Klausur eingesehen am: ....

Unterschrift des Prüfers: ....

Aufgabe 1: Geben Sie den Wahrheitsgehalt der folgenden Aussagen durch **Ja** oder **Nein** an, und schreiben Sie eine kurze Begründung in 1–2 Sätzen.

1. Sei $f\colon V \to W$ eine orthogonale bzw. unitäre Abbildung zwischen euklidischen bzw. unitären Vektorräumen. Gilt immer: $f(x) \perp f(y) \implies x \perp y$ für alle $x, y \in V$?

---

2. Sei $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Dann ist M triagonalisierbar.

---

3. Wenn in der Jordanschen Normalform ein Block der Größe $n \geq 2$ vorkommt, ist der Endomorphismus nicht diagonalisierbar.

---

4. Sei $\dim(V) < \infty$, $f \in \mathrm{End}(V)$. Dann ist die Jordanbasis eindeutig bestimmt.

Aufgabe 2: Geben Sie die Aussage der folgenden Sätze (ohne Beweis).

1. Der Satz von der Jordan-Zerlegung.
2. Das Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren.

Aufgabe 3: Sei $M \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C})$ die folgende Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen Sie die Eigenwerte von M und ihre algebraischen und geometrischen Vielfachkeiten.
2. Bestimmen Sie eine Jordanbasis von M.

Aufgabe 4: Sei $s\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform mit darstellender Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Verifizieren Sie, dass s ein Skalarprodukt ist.
2. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit darstellender Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ist f selbst-adjunigiert bezüglich s?

Aufgabe 5: Sei $s\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform mit darstellender Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Berechnen Sie Rang und Index von s.
2. Ist s ein Skalarprodukt?
3. Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis für s.

Aufgabe 6: Sei $M \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C})$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen Sie die Jordanzerlegung $M_\mathrm{s} + M_\mathrm{n}$ von M.
2. Berechnen Sie das Minimalpolynom von M.

Aufgabe 7: Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$, und seien $f, g\colon V \to V$ zwei Endomorphismen für die jeweils eine Basis aus Eigenvektoren existiert. Zeigen Sie: Wenn $f \circ g = g \circ f$, dann gibt es eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V aus Vektoren, die gleichzeitig Eigenvektoren von f und g sind.