"Lineare Algebra II"
SS 2019 — Übungsblatt 3

Ausgabe: 14.05.2019, **Abgabe:** 21.05.2019

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss19/la.html

Sie erhalten zusätzlich 2 Punkte für das Ausfüllen des Online-Tests. Diese sind Teil der Pflichtwertung. Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 3.1: Sei M die Matrix

$$\begin{pmatrix} E_3 & 0 \\ 0 & -E_1 \end{pmatrix}$$

Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^4$ ist *raumartig*, bzw. *zeitartig*, bzw. *lichtartig*, wenn $v^t M v > 0$, bzw. $v^t M v = 0$, bzw. $v^t M v < 0$. Berechnen Sie für die folgenden Vektoren, ob sie raum-, oder zeit-, oder lichtartig sind.
(i) $(-1, 1, 3, -2)^t$ (ii) $(2, -2, -1, 3)^t$ (iii) $(1, 2, -1, -3)^t$ **(3P)**

Aufgabe 3.2: Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum, und seien $f, g\colon V \to V$ selbstadjungierte Endomorphismen. Zeigen Sie: $f \circ g$ ist genau dann selbstadjungiert, wenn $f \circ g = g \circ f$. **(2P)**

Aufgabe 3.3: Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$, und seien $f, g\colon V \to V$ zwei Endomorphismen für die jeweils eine Basis aus Eigenvektoren existiert. Zeigen Sie: Wenn $f \circ g = g \circ f$, dann gibt es eine Basis $v_1, \dots, v_n$ von V aus Vektoren, die gleichzeitig Eigenvektoren von f und g sind. **(4P)**

Aufgabe 3.4: Sei $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ symmetrisch. Zeigen Sie: Alle Eigenwerte von M sind ≥ 0 genau dann, wenn es ein $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ gibt mit $M = B^t B$. Alle Eigenwerte sind > 0 genau dann, wenn B invertierbar ist. **(6P)**

Aufgabe 3.5: Sei V ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum, und sei $f\colon V \to V$ ein unitärer Endomorphismus. Geben Sie einen direkten Beweis der Aussage: Es gibt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von f. **(4P)**

Bonus-Aufgabe 3.6: Sei $M = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ hermitesch. Für $k = 1, \dots, n$ schreiben wir M_k für die Teilmatrix $M_k = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$. Zeigen Sie: M ist positiv-definit genau dann, wenn $\det(M_k) > 0$, für alle $k = 1, \dots, n$. **(6P)**