"Lineare Algebra II"
SS 2019 — Übungsblatt 4

Ausgabe: 21.05.2019, **Abgabe:** 28.05.2019

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss19/la.html

Sie erhalten zusätzlich 2 Punkte für das Ausfüllen des Online-Tests. Diese sind Teil der Pflichtwertung. Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 4.1: Sei $q\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Bilinearform mit darstellender Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

1. Berechnen Sie den Rang und Index von q. **(3P)**
2. Ist q ein Skalarprodukt? **(1P)**

Aufgabe 4.2: Sei $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{F}_3)$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Bringen Sie M in obere Dreiecksgestalt. **(4P)**
2. Bestimmen Sie die Eigenwerte von M und für jeden Eigenwert die algebraische und geometrische Vielfachkeit. **(2P)**

Aufgabe 4.3: Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien $f, g \in k[X]$ zwei Polynome, die teilerfremd sind zueinander (d.h. sie haben keine gemeinsame Nullstellen). Sei

$$U_f = k[X] \cdot f = \{h \cdot f \mid h \in k[X]\}$$

bzw. $U_g = k[X] \cdot g$ und $U_{fg} = k[X] \cdot (f \cdot g)$.

1. Zeigen Sie, dass U_f ein Untervektorraum ist.
2. Bestimmen Sie die Dimension von $k[X]/U_f$.
3. Zeigen Sie: $U_f \cap U_g = U_{fg}$.
4. Zeigen Sie, dass die Abbildung $P + U_{fg} \mapsto (P + U_f, P + U_g)$ wohldefiniert ist und einen Isomorphismus $k[X]/U_{fg} \cong k[X]/U_f \times k[X]/U_g$ induziert. **(8P)**

(bitte wenden)

Bonus-Aufgabe 4.4: Wir betrachten die Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & -18 & -5 \\ 4 & -16 & 54 & -22 \\ -4 & -20 & 45 & -5 \\ -11 & -10 & 9 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{Q})$$

Benutzen Sie ein Algebraprogramm Ihrer Wahl, um die Matrix in obere Dreiecksgestallt zu bringen. Geben Sie ein Printout ab. **(4P)**