“Lineare Algebra II”
SS 2019 — Übungsblatt 5

Ausgabe: 28.05.2019, **Abgabe:** 04.06.2019

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss19/la.html

Sie erhalten zusätzlich 2 Punkte für das Ausfüllen des Online-Tests. Diese sind Teil der Pflichtwertung. Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 5.1: Sei $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Q})$ die folgende Matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Berechnen Sie das Minimalpolynom von M.
2. Berechnen Sie M^7. **(4P)**

Aufgabe 5.2: Sei V endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper k, $p\colon V \to V$ ein Projektor, also $p^2 = p$.

a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von p.

b) Benutzen Sie a) und die Sätze der Vorlesung um zu zeigen:
Es gibt eindeutig bestimmte p-invariante Teilräume $U_0, U_1 \subset V$, so dass $p|_{U_0} = 0$ und $p|_{U_1} = \mathrm{id}$ und $U_0 \oplus U_1 = V$. **(4P)**

Aufgabe 5.3: Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper k und $f\colon V \to V$ ein Automorphismus. Zeigen Sie: es existiert ein Polynom $P \in k[X]$ mit $f^{-1} = P(f)$. **(4P)**

(bitte wenden)

Aufgabe 5.4: Sei k ein Körper und $f \in k[X]$ ein normiertes Polynom vom Grad n. Wie letztes Mal schreiben wir U_f für $k[X] \cdot f = \{g \cdot f \mid g \in k[X]\}$.

1. Zeigen Sie, dass Multiplikation mit X auf $k[X]$ einen Endomorphismus
$$m_X\colon k[X]/U_f \longrightarrow k[X]/U_f$$
induziert.
2. Bestimmen Sie die darstellende Matrix von m_X bezüglich der Basis $(\bar{1}, \bar{X}, \bar{X}^2, \ldots, \bar{X}^{n-1})$, wobei $\bar{X}^i = X^i + U_f$.
3. Berechnen Sie das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von m_x. **(6P)**

Bonus-Aufgabe 5.5: Sei k ein Körper und $f, g \in k[X]$ normierte Polynome. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von

$$(m_X, m_X)\colon k[X]/U_f \times k[X]/U_g \longrightarrow k[X]/U_f \times k[X]/U_g. \qquad \textbf{(3P)}$$