"Lineare Algebra II"
SS 2019 — Übungsblatt 8

Ausgabe: 25.06.2019, **Abgabe:** 02.07.2019

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss19/la.html

Sie erhalten zusätzlich 2 Punkte für das Ausfüllen des Online-Tests. Diese sind Teil der Pflichtwertung. Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 8.1: Sei $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Q})$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie M^{99}. **(4P)**

Aufgabe 8.2: Ein Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ ist *halbeinfach*, wenn A diagonalisierbar ist als komplexe Matrix.

1. Sei $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ eine Matrix. Zeigen Sie: Es existieren $M_\mathrm{s}, M_\mathrm{n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ mit $M = M_\mathrm{s} + M_\mathrm{n}$, M_s halbeinfach, M_n nilpotent, $M_\mathrm{s} \cdot M_\mathrm{n} = M_\mathrm{n} \cdot M_\mathrm{s}$; und diese Zerlegung ist eindeutig.
2. Geben Sie ein Beispiel von ein Zahl n und Matrix $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, so dass M halbeinfach ist, aber nicht diagonalisierbar über $\mathbb{R}$. **(4P)**

Aufgabe 8.3: Sei k ein Körper und seien $M, N \in \mathrm{M}_n(k)$ zwei Matrizen, die miteinander vertauschen: $MN = NM$. Zeigen Sie für alle $m \in \mathbb{N}$:

$$(M+N)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} M^i N^{m-i}. \qquad \textbf{(4P)}$$

Aufgabe 8.4:

1. Sei $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ eine Matrix. Zeigen Sie, dass $\exp(M)$ invertierbar ist. Wir erhalten eine Abbildung $\exp\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Erinnerung: Die Spur $\mathrm{tr}\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ einer quadratischen Matrix ist die Summe der Diagonaleinträge. Es gilt $\mathrm{tr}(S^{-1}MS) = \mathrm{tr}(M)$ für alle $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ und $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

(bitte wenden)

2. Überpüfen Sie, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \arrow[r, "\mathrm{tr}"] \arrow[d, "\exp"] & \mathbb{C} \arrow[d, "\exp"] \\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \arrow[r, "\det"] & \mathbb{C}^* \end{tikzcd}$$

Mit anderen Worten: für jedes $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ gilt:

$$\det(\exp(M)) = \exp(\mathrm{tr}(M)). \qquad (\mathbf{6P})$$