"Lineare Algebra II"
SS 2019 — Übungsblatt 10

Ausgabe: 09.07.2019, **Abgabe:** 16.07.2019

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss19/la.html

Sie erhalten zusätzlich 2 Punkte für das Ausfüllen des Online-Tests. Diese sind Teil der Pflichtwertung. Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 10.1: Sei V ein Vektorraum mit Basis $(v_1, \dots, v_m)$ und $f \in \mathrm{End}(V)$ mit darstellender Matrix M. Sei W ein Vektorraum mit Basis $(w_1, \dots, w_m)$ und $g \in \mathrm{End}(W)$ mit darstellender Matrix N.

1. Berechnen Sie die darstellende Matrix von $f \otimes g \in \mathrm{End}(V \otimes W)$ bezüglich der Basis
$$v_1 \otimes w_1, v_1 \otimes w_2, \dots, v_1 \otimes w_n, v_2 \otimes w_1, \dots, v_2 \otimes w_n, \dots, v_m \otimes w_n.$$
2. Sei $V = W = k$. Berechnen Sie explizit die Abbildung
$$\begin{aligned} \mathrm{M}_1(k) \times \mathrm{M}_1(k) &\to \mathrm{M}_1(k) \\ (M, N) &\mapsto M \otimes N. \end{aligned}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 10.2: (Die universelle Eigenschaft der direkten Summe.) Sei I eine Menge, und für jedes $i \in I$ sei V_i ein Vektorraum über k. Sei $\phi_i \colon V_i \to \bigoplus_{j \in I} V_j$ die lineare Abbildung

$$v \mapsto (v_j)_{j \in I}, \qquad v_j = \begin{cases} v & \text{falls } j = i \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei W ein k-Vektorraum. Sei $f_i \colon V_i \to W$ eine lineare Abbildung, für alle $i \in I$. Zeigen Sie: Es existiert eine eindeutige lineare Abbildung $f \colon \bigoplus_{i \in I} V_i \to W$, so dass $f \colon \phi_i = f_i$ für alle $i \in I$.

(4 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 10.3: Seien U, V, W, V_1, V_2, W_1 und W_2 Vektorräume über k.

1. Zeigen Sie, es existiert eine natürliche lineare Abbildung
$$\phi_{V,W} \colon V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}_k(V, W).$$
(*Natürlich* heißt: für alle linearen Abbildungen $f \colon V_2 \to V_1$ und $g \colon W_1 \to W_2$ erhalten wir ein Diagramm
$$\begin{tikzcd} V_1^* \otimes W_1 \arrow[r, "\phi_{V_1,W_1}"] \arrow[d, "f^* \otimes g"] & \mathrm{Hom}_k(V_1, W_1) \arrow[d, "h \mapsto g \circ h \circ f"] \\ V_2^* \otimes W_2 \arrow[r, "\phi_{V_2,W_2}"] & \mathrm{Hom}_k(V_2, W_2) \end{tikzcd}$$
das kommutiert.)

2. Sei W endlich-dimensional. Zeigen Sie, dass $\phi_{V,W}$ ein Isomorphismus ist.

3. Durch Verknüpfung erhalten wir eine bilineare Abbildung
$$\mathrm{Hom}_k(U, V) \times \mathrm{Hom}_k(V, W) \to \mathrm{Hom}_k(U, W).$$
Sei ψ die zugehörige Abbildung
$$(U^* \otimes V) \otimes (V^* \otimes W) \to U^* \otimes W.$$
Was ist das Bild eines elementaren Tensors $(u^* \otimes v) \otimes (v^* \otimes w)$ unter ψ, für $u^* \in U^*$, $v \in V$, $v^* \in V^*$ und $w \in W$?

(8 Punkte)

Bonus-Aufgabe 10.4: Sei $M \in \mathrm{M}_5(\mathbb{C})$ die Matrix
$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & -6 & -3 & -1 \\ 7 & 4 & 7 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 7 & 3 & 1 \\ -7 & -3 & -7 & -2 & 0 \\ 9 & 5 & 8 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$
Berechnen Sie eine Jordanbasis für M. (Hinweis: Der einzige Eigenwert ist 1.)

(6 Punkte)