Übungen zur "Algebraische Zahlentheorie" SS20 Blatt 1

Ausgabe: 18.5.2020, **Abgabe:** 25.5.2020

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss20/algzt/index.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen. Bei Aufgaben, die als *mit SAGE* deklariert sind, erklären Sie, wie Sie vorgegangen sind, d.h. dokumentieren Sie, was Sie SAGE haben rechnen lassen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 1.1: (ohne SAGE; 10 Punkte) Beweisen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ ein Euklidischer Ring ist. Bestimmen Sie die Einheitengruppe $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]^\times$.

Aufgabe 1.2: (ohne SAGE; 10 Punkte) Sei

$$\mathcal{O} := \left\{ a + b\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right) \middle| \, a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

1. Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}$ ein Unterring von $\mathbb{C}$ ist.
2. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] \subsetneq \mathcal{O}$ ein echter Unterring ist.
3. Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}$ ein Euklidischer Ring ist.

Aufgabe 1.3: (mit SAGE; 20 Punkte) Sei c die Anzahl der Buchstaben in Ihrem Vorname, c' die in Ihrem Nachnamen.

1. (10 Punkte) Bestimmen Sie die kleinste Primzahl p, so dass
$$p \geq 100c^2 + c'$$
gilt und zudem die Gleichung
$$x^2 - 2y^2 = p \tag{1}$$
unendlich viele Lösungen $x, y \in \mathbb{Z}$ besitzt.
2. (10 Punkte) Geben Sie eine Lösung x, y von Gleichung (1) an, die
$$|x| \geq 10.000.000.000.000$$
erfüllt. Nutzen Sie dafür die Methode, die im dritten *NormEq*-Video erklärt wird. Das Video *NumberFields* kann auch helfen.

Benutzen Sie für diese Aufgabe SAGE. Erklären Sie, wie Sie vorgegangen sind. Es gibt ganz viele verschiedene Möglichkeiten. Da die Lösung für fast alle Personen im Kurs eine andere sein wird, laden wir Sie besonders dazu ein, sich im Forum gegenseitig zu helfen. Diese Aufgabe ist nicht unbedingt dazu gedacht völlig allein gelöst zu werden. Gerade in einem Online-Lehre-Semester ist ein bisschen Kommunikation wünschenswert.

Bonus-Aufgabe 1.4: (ohne SAGE; 10 Punkte) Sei $\mathbb{Z}[\frac{\pi i}{2}]$ der kleinste Unterring von $\mathbb{C}$, der $\mathbb{Z}$ und $\frac{\pi i}{2}$ enthält. Ist dieser Ring Euklidisch? Beweisen Sie Ihre Antwort.

(Sie dürfen verwenden, dass $\frac{\pi i}{2}$ eine transzendente Zahl ist)