Übungen zur “Algebraische Zahlentheorie”
SS20   Blatt 2

Ausgabe: 25.5.2020, **Abgabe:** 1.6.2020

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss20/algzt/index.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen. Bei Aufgaben, die als *mit SAGE* deklariert sind, erklären Sie, wie Sie vorgegangen sind, d.h. dokumentieren Sie, was Sie SAGE haben rechnen lassen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 2.1: (ohne SAGE; 10 Punkte) Eine ganze Zahl n heißt *quadratfrei* falls für jedes $m \geq 2$ gilt, dass $m^2 \nmid n$ (d.h. m^2 ist kein Teiler von n). Sei K ein Zahlkörper mit $[K : \mathbb{Q}] = 2$. Beweisen Sie, dass es eine quadratfreie Zahl n gibt mit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{n})$.

Aufgabe 2.2: (mit oder ohne SAGE; 10 Punkte) Sei p eine ungerade Primzahl und $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{p}})$ der kleinste Unterkörper von $\mathbb{C}$, der $e^{\frac{2\pi i}{p}}$ enthält.

1. Bestimmen Sie $[\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{p}}) : \mathbb{Q}]$.
2. Bestimmen Sie die Norm und Spur der Elemente $e^{\frac{2\pi i s}{p}}$ für $s = 0, 1, \ldots, p-1$.
3. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ ein Unterring von $\mathbb{Z}[e^{\frac{2\pi i}{3}}]$ ist. (Tipp: plotten Sie die Norm 1 Umgebungen aus Aufgabe 1.2, und/oder finden Sie ein hilfreiches Dreieck)

Aufgabe 2.3: (ohne SAGE; 10 Punkte) Sei R ein Integritätsbereich. Wir betrachten Abbildungen $f : R \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit

1. $f(x) = 0$ dann und nur dann wenn $x = 0$,
2. für alle $a, b \in R \setminus \{0\}$ gilt entweder: $a \in (b)$ (“b teilt a”), oder es existieren $x, y \in R$ mit
$$0 < f(xa - yb) < f(b).$$

Beweisen Sie, dass R ein Hauptidealring ist dann und nur dann wenn eine solche Funktion f existiert.

(Tipp: Falls R ein Hauptidealring ist, ist die Anzahl der Primfaktoren eine interessante Zahl...)

Aufgabe 2.4: (ohne SAGE; 10 Punkte) Wir suchen alle Lösungen $y, z \in \mathbb{Z}$ von

$$y^2 + 4 = z^3$$

mit y ungerade. Wir gehen wie folgt vor.

1. Zeigen Sie, dass die Norm für den Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ für $a, b \in \mathbb{Q}$ die Gleichung
$$N(a + b\sqrt{-1}) = a^2 + b^2$$
erfüllt.

2. Bestimmen Sie die Einheiten $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]^\times$ und zeigen Sie, dass jede Einheit als dritte Potenz einer Einheit geschrieben werden kann.

3. Faktorisieren Sie die Gleichung als
$$z^3 = (2 + y\sqrt{-1})(2 - y\sqrt{-1})$$
und nutzen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ ein Euklidischer Ring ist. Zeigen Sie, dass jedes Element $a + b\sqrt{-1}$, welches gemeinsamer Teiler von $2 + y\sqrt{-1}$ und $2 - y\sqrt{-1}$ ist, eine Einheit sein muss, d.h. die Faktoren sind teilerfremd.

4. Bestimmen Sie alle Lösungen mit y ungerade.

Bonus-Aufgabe 2.5: (ohne SAGE; 5 Punkte) Bestimmen Sie auch alle Lösungen in der vorherigen Aufgabe mit y gerade.