Übungen zur "Algebraische Zahlentheorie"
SS20 Blatt 4

Ausgabe: 8.6.2020, **Abgabe:** 15.6.2020

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss20/algzt/index.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen. Bei Aufgaben, die als *mit SAGE* deklariert sind, erklären Sie, wie Sie vorgegangen sind, d.h. dokumentieren Sie, was Sie SAGE haben rechnen lassen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 4.1: (ohne SAGE; 5 Punkte) Sei R ein Dedekindring.

1. Seien I, J Ideale in R. Beschreiben Sie, wie die eindeutige Faktorisierung von $I + J, I \cap J$ und IJ im Vergleich zur eindeutigen Faktorisierung von I und J selbst aussieht. Wie verhalten sich die Exponenten?

2. Seien $(0) \neq I \subseteq J$ Ideale in R. Zeigen Sie, dass $J^{-1}I$ ein Ideal in R ist (statt nur ein gebrochenes Ideal).

Aufgabe 4.2: (ohne SAGE; 10 Punkte) Sei F ein Zahlkörper.

1. Beweisen Sie, dass F immer ein primitives Element α besitzt mit $\alpha \in \mathcal{O}_F$.

2. Beweisen Sie, dass das Vorzeichen der Diskriminante von F stets $(-1)^s$ ist, wobei s die Anzahl der komplex konjugierten Paare $(\phi, \overline{\phi})$ von Einbettungen $\phi : F \hookrightarrow \mathbb{C}$ ist, d.h. $2s$ ist die Anzahl der Einbettungen nach $\mathbb{C}$, deren Bild nicht in $\mathbb{R}$ liegt. (Tipp: Gruppieren Sie die Terme in einer geeigneten Formel geschickt)

Aufgabe 4.3: (ohne SAGE; 17 Punkte) Sei R ein Dedekindring.

1. Seien $P_1, \dots, P_n$ paarweise verschiedene maximale Ideale in R mit $n \geq 2$. Sei $J := P_1 \cdots P_n$. Definiere

$$Q_i := P_1 \cdots P_{i-1} P_{i+1} \cdots P_n.$$

Sei $I \neq (0)$ ein Ideal in R. Zeigen Sie, dass für jedes i ein Element $a_i \in IQ_i \backslash IJ$ existiert. Definiere nun

$$a := \sum_{i=1}^{n} a_i \in I.$$

Zeigen Sie, dass für alle i gilt: $a_i \notin IP_i$.
Folgern Sie, dass für alle i gilt: $a \notin IP_i$.

2. Seien $I, J \neq (0)$ beliebige Ideale in R. Beweisen Sie, dass ein Ideal $I' \neq (0)$ existiert, so dass $I \cdot I'$ ein Hauptideal ist und gleichzeitig $I' + J = R$ gilt.

3. Folgern Sie, dass falls R nur endliche viele maximale Ideale besitzt, die Idealklassengruppe trivial sein muss.

4. Beweisen Sie, dass jedes Ideal in R von zwei Elementen erzeugt werden kann, d.h. für alle Ideale I existieren $x_1, x_2 \in R$ mit $I = (x_1, x_2)$.

Aufgabe 4.4: (ohne SAGE; 8 Punkte) Sei

$$f = T^n + aT + b$$

mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ ein irreduzibles Polynom in $\mathbb{Z}[T]$.

1. Berechnen Sie die Diskriminante für beliebige a, b im Spezialfall $n = 3$.

2. Folgern Sie (wieder für $n = 3$) aus einer anderen Aufgabe, dass f drei paarweise verschiedene reelle Lösungen besitzt dann und nur dann wenn die Diskriminante positiv ist.

3. (Bonus-Aufgabe; 5 Punkte): Berechnen Sie die Diskriminante für den Fall $n \geq 2$ beliebig. Dies ist mit kontrollierbarem Arbeitsaufwand möglich, aber bedarf einer geschickten Idee.