Übungen zur "Algebraische Zahlentheorie"
SS20 Blatt 5

Ausgabe: 15.6.2020, **Abgabe:** 22.6.2020

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss20/algzt/index.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen. Bei Aufgaben, die als *mit SAGE* deklariert sind, erklären Sie, wie Sie vorgegangen sind, d.h. dokumentieren Sie, was Sie SAGE haben rechnen lassen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 5.1: (ohne SAGE; 10 Punkte) Geben Sie präzise Beweise für die folgenden Identitäten:

1. $$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+z^{2^n}\right)=\frac{1}{1-z} \qquad (\text{für } z\in\mathbb{C},\ |z|<1)$$

2. $$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}P(n)z^n, \qquad (\text{für } z\in\mathbb{C},\ |z|<1)$$
   wobei $P(n)$ die Anzahl der Möglichkeiten ist, die Zahl n als Summe von positiven ganzen Zahlen zu schreiben (ohne Beachtung der Reihenfolge und $P(0)$ entspricht *einer* leeren Summe).

3. $$\prod_{p}\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}, \qquad (\text{für } s\in\mathbb{C},\ \operatorname{Re}s>1)$$
   wobei das Produkt über alle Primzahlen p zu nehmen ist.

4. Folgern Sie aus (3) und dem Limes $s\to 1$, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Beweisen Sie (dadurch inspiriert), dass $\mathcal{O}_F$ stets unendlich viele Primideale besitzt, wobei F ein beliebiger Zahlkörper sei.

Falls Sie sich ratlos fühlen, multiplizieren Sie jeweils einige erste wenige Faktoren des unendlichen Produkts von Hand aus und versuchen Sie ein Muster zu erkennen.

Aufgabe 5.2: (ohne SAGE; 10 Punkte) Eine Funktion $\chi:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ heißt *multiplikativ* falls

$$\chi(mn)=\chi(m)\cdot\chi(n)$$

für alle teilerfremden m,n gilt. Die *L-Funktion* zu χ wird durch

$$L(s,\chi):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}$$

definiert. In dieser Aufgabe müssen Sie es mit der Konvergenz nicht so genau nehmen (um den Arbeitsaufwand zu reduzieren).

1. Beweisen Sie die Identität

$$L(s,\chi) = \prod_p \left(1 + \chi(p)p^{-s} + \chi(p^2)p^{-2s} + \cdots\right).$$

   Bestimmen Sie auch die Vereinfachung, die auftritt, wenn für jede Primzahl p zusätzlich $\chi(p^n) = \chi(p)^n$ gilt.

2. Seien χ, χ' multiplikativ. Beweisen Sie, dass

$$L(s,\chi) \cdot L(s,\chi') = L(s, \chi * \chi')$$

   mit

$$(\chi * \chi')(n) := \sum_{d|n} \chi(d)\chi'\left(\frac{n}{d}\right),$$

   wobei die Summe über alle Teiler d von n zu nehmen ist. Ist $\chi * \chi'$ multiplikativ?

Aufgabe 5.3: (teilweise mit SAGE; 20 Punkte) Wir betrachten den Zahlkörper $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$.

1. Wir erinnern uns, dass $N(a + b\sqrt{-1}) = a^2 + b^2$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}_F^\times$ genau 4 Elemente besitzt.

2. Wir definieren

$$r(n) := \#\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \text{ mit } a^2 + b^2 = n\}. \tag{1}$$

   Beweisen Sie, dass die Dedekind Zetafunktion die Gleichung

$$4\zeta_F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^s}$$

   erfüllt. (Tipp: Dazu müssen Sie sich überlegen, wie die Ideale in $\mathcal{O}_F$ aussehen. Ist $\mathcal{O}_F$ ein Hauptidealring?)

3. Zeigen Sie, dass (2) in $\mathcal{O}_F$ verzweigt.

4. Zeigen Sie, dass für alle Primzahlen p mit $p \equiv 1 (\bmod 4)$ wir eine Faktorisierung $p\mathcal{O}_F = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ in Primideale erhalten, für $p \equiv 3 (\bmod 4)$ das Ideal $p\mathcal{O}_F$ selbst prim ist. (Tipp: Wir hatten in dem *NormEq3* Video so etwas für $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ mal analysiert)

5. Berechnen Sie jeweils die Idealnormen, die in den einzelnen Fällen in (4) auftreten.

6. Folgern Sie, dass
$$\zeta_F(s) = \zeta_{\mathbb{Q}}(s)L(s,\chi)$$
mit
$$\chi(n) := \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right).$$
Es hilft sicher, sich die Werte von χ an den ganzen Zahlen vorher zu überlegen.

7. Folgern Sie, dass
$$r(n) = 4\sum_{d|n} \sin\left(\frac{\pi d}{2}\right).$$
Man kann wohl behaupten, dass diese explizite Formel für das Zählproblem in (1) nicht gerade offensichtlich ist.

8. Schreiben Sie (mit SAGE) das schnellstmögliche Programm, um $r(n)$ zu berechnen. Berechnen Sie damit die Zahl[1]
$$r(1000000000000).$$
Über
```
import time
time.time()
```
kann man zu jedem Zeitpunkt eine Zeitmessung erhalten. Die Differenz solcher Zeitnahmen kann also zum Messen von Laufzeiten verwendet werden. Um Missverständnissen vorzubeugen: Sie sollen nicht beweisen, dass Ihr Programm wirklich 'schnellstmöglich' ist. Sie sollen es nur so sehr optimieren, wie es Ihnen möglich erscheint.

9. Schauen Sie sich das Numberphile Video *"Impossible Squares"* (uploaded April 2020) an und genießen Sie Ihr Wissen. Beweisen Sie die Unmöglichkeits-Aussage, die bei 9:36 im Video steht.[2]

Sie dürfen ohne Beweis die folgende Aussage benutzen: Sei $f(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ gegeben, und $T_0 \in \mathbb{R}$ eine Zahl, so dass für alle $\operatorname{Re} s > T_0$ die Reihe absolut konvergiert. Gilt für alle solche s zudem $f(s) = 0$, so folgt $a_n = 0$ für alle $n \geq 1$.

(Diese Aussage ist nicht schwierig zu beweisen, lenkt aber von der Stoßrichtung der Übung ab und soll Sie nicht unnötig Zeit kosten)

[1] Um in SAGE mit Ganzzahlen beliebiger Größe arbeiten zu können, schreiben Sie `Integer(n)` statt nur n (d.h. nutzen Sie die `Integer`-Klasse).

[2] Die Art, wie *Algebraische Zahlentheorie* Struktur in solche ansonsten völlig exotisch anmutende Antworten bringt, ist immer wieder erstaunlich.