Übungen zur "Algebraische Zahlentheorie"
SS20 Blatt 6

Ausgabe: 22.6.2020, **Abgabe:** 29.6.2020

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss20/algzt/index.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen. Bei Aufgaben, die als *mit SAGE* deklariert sind, erklären Sie, wie Sie vorgegangen sind, d.h. dokumentieren Sie, was Sie SAGE haben rechnen lassen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 6.1: (evtl. mit SAGE-Hilfe; 10 Punkte) Sei F ein Zahlkörper.

1. Zeigen Sie, dass für $\alpha \in \mathcal{O}_F$ gilt, dass α eine Einheit ist dann und nur dann wenn $N(\alpha) = \pm 1$.
2. Sei jetzt lediglich $\alpha \in F$. Folgt aus $N(\alpha) = \pm 1$ bereits $\alpha \in \mathcal{O}_F^\times$?
3. Sei $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ der *Goldene Schnitt* und $F = \mathbb{Q}(\varphi)$. Zeigen Sie, dass für jedes $C > 0$ ein $n_C \geq 1$ existiert, so dass für alle $n \geq n_C$ die Ungleichung
$$\mathcal{N}(I_n) \geq C$$
für das Ideal $I_n = (1 - \varphi^n)$ gilt.
4. Teilt in Aufgabenteil 3 das Primideal $(2) \subset \mathcal{O}_F$ unendlich viele der $\{I_1, I_2, I_3, \dots\}$?[1]

Aufgabe 6.2: (ohne SAGE; 10 Punkte) In Galois-Erweiterungen ist die Faktorisierung von Primzahlen von einfacherer Struktur: Sei F ein Zahlkörper von Grad n, so dass $F/\mathbb{Q}$ eine Galois-Erweiterung ist.

1. Beweisen Sie, dass $\mathcal{O}_F^{\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})} = \mathbb{Z}$.
2. Beweisen Sie, dass wenn $\mathfrak{p}$ ein Primideal in $\mathcal{O}_F$ ist und $\sigma \in \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$, dann ist $\sigma\mathcal{O}_F = \mathcal{O}_F$ und $\sigma\mathfrak{p}$ ist ein Primideal.
3. Beweisen Sie, dass in der Primideal-Faktorisierung
$$p\mathcal{O}_F = \prod_{i=1}^{g} \mathfrak{p}_i^{e_i}$$
die Gleichheit $e := e_1 = \cdots = e_g$ und $f := f_1 = \cdots = f_g$ gilt. Folgern Sie
$$efg = n.$$

[1] Falls Sie ratlos sind, können Sie mit SAGE experimentieren. Wenn `K` ein Zahlkörper ist, so können Sie mit `factor(K.ideal(`*Erzeuger*`))` die Faktorisierung im Ganzheitsring anzeigen lassen.

Aufgabe 6.3: (evtl. mit SAGE-Hilfe; 10 Punkte) Wir betrachten die Zahlkörper $F_i = \mathbb{Q}(\alpha_i)$, wobei

1. α_1 Lösung des Polynoms $T^3 + 10T + 1$ ist.
2. α_2 Lösung des Polynoms $T^3 - 8T + 15$ ist.

Bestimmen Sie jeweils den Ganzheitsring $\mathcal{O}_{F_i}$ (mit Beweis!). Natürlich können Sie mit SAGE Ihre Antwort prüfen. Beweisen Sie, dass F_1 und F_2 nicht isomorph sein können, indem Sie die Struktur der Ganzheitsringe vergleichen. (Tipp: 17)

Aufgabe 6.4: (ohne SAGE; 10 Punkte) Sei F ein Zahlkörper und $I \neq (0)$ ein Ideal in $\mathcal{O}_F$. Beweisen Sie, dass

$$\#\left(\mathcal{O}_F/I\right)^\times = \mathcal{N}(I) \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \mathcal{N}(\mathfrak{p})^{-1}\right),$$

wobei $\mathfrak{p}$ durch alle Primideale $I \subseteq \mathfrak{p} \subsetneqq \mathcal{O}_F$ läuft. Man kann dazu auf die folgende Weise vorgehen:

1. Gilt die Formel für Ideale I, J, die teilerfremd sind, so gilt sie für IJ.
2. Es genügt daher, die Formel für Ideale P^n mit P prim und $n \geq 1$ zu beweisen.
3. $\mathcal{O}_F/P^n$ ist ein Hauptidealring (vielleicht hilft eine Aufgabe von Blatt 4).
4. Zeigen Sie, dass $G_i := 1 + P^i$ $(i \geq 1)$ eine Untergruppe von $(\mathcal{O}_F/P^n)^\times$ ist.
5. Betrachten Sie die Quotienten G_i/G_{i+1}.