Übungen zur "Algebraische Zahlentheorie"
SS20 Blatt 7

Ausgabe: 29.6.2020, **Abgabe:** 6.7.2020

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss20/algzt/index.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen. Bei Aufgaben, die als *mit SAGE* deklariert sind, erklären Sie, wie Sie vorgegangen sind, d.h. dokumentieren Sie, was Sie SAGE haben rechnen lassen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Auf diesem Blatt lohnt es sich, die Aufgaben in der vorgegebenen Reihenfolge zu bearbeiten.

Aufgabe 7.1: (ohne SAGE; 15 Punkte) Sei $F = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$.

1. Berechnen Sie die Diskriminante von $T^3 - 5$.
2. Folgern Sie, dass $[\mathcal{O}_F : \mathbb{Z}[\sqrt[3]{5}]]$ ein Teiler von 15 ist.
3. Zeigen Sie, dass $5 \nmid [\mathcal{O}_F : \mathbb{Z}[\sqrt[3]{5}]]$.
4. Die Zahl $1 + \sqrt[3]{5}$ ist eine Lösung von $(T-1)^3 - 5$. Folgern Sie, dass $3 \nmid [\mathcal{O}_F : \mathbb{Z}[1 + \sqrt[3]{5}]]$.
5. Folgern Sie, dass $\mathcal{O}_F = \mathbb{Z}[\sqrt[3]{5}]$.
6. Adaptieren Sie diese Methode, um den Ganzheitsring von $F = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$ zu bestimmen.

Sie können Ihre Antwort natürlich mit SAGE prüfen, aber Sie sollen hier eine komplette Rechnung/Beweis vorlegen.

Aufgabe 7.2: (ohne SAGE; 10 Punkte) Sei $F = \mathbb{Q}(\alpha)$ ein Zahlkörper, wobei das Minimalpolynom f von α ein Eisensteinpolynom bezüglich der Primzahl p in $\mathbb{Z}[T]$ ist. Beweisen Sie:

1. Es existiert nur ein Primideal $\mathfrak{p}$ in $\mathcal{O}_F$ mit $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (p)$ und die Primidealfaktorisierung von $p\mathcal{O}_F$ lautet
$$p\mathcal{O}_F = \mathfrak{p}^{[F:\mathbb{Q}]}.$$
Wenn dies gilt, nennt man p übrigens *total verzweigt*.
2. Es gilt $p \mid \Delta_F$.
3. Folgern Sie, dass in $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ die Primzahlen 3 und 5 total verzweigt sind.

4. Bestimmen Sie alle total verzweigten Primzahlen in $F = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$.

Aufgabe 7.3: (ohne SAGE; 15 Punkte) Wir wollen die Umkehrung der obigen Aufgabe zeigen: Sei F ein Zahlkörper und p eine total verzweigte Primzahl. Dann existiert ein $\alpha \in \mathcal{O}_F$, so dass $F = \mathbb{Q}(\alpha)$ und das Minimalpolynom von α ist ein Eisensteinpolynom bezüglich p.
Wir folgen den Schritten:

1. Sei $p\mathcal{O}_F = \mathfrak{p}^{[F:\mathbb{Q}]}$ mit $\mathfrak{p}$ prim. Wähle $\alpha \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}^2$. Folgern Sie, dass
$$\alpha\mathcal{O}_F = \mathfrak{p}I, \tag{1}$$
wobei I ein Ideal ist, welches zu $\mathfrak{p}$ teilerfremd ist.

2. Berechnen Sie die Idealnorm von $\mathfrak{p}$ und zeigen Sie, dass $p \nmid \mathcal{N}(I)$.

3. Sei
$$f = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_0$$
das charakteristische Polynom von α. Folgern Sie, dass $p \mid a_0$, aber $p^2 \nmid a_0$.

4. Folgern Sie aus (1), dass $\alpha^n \in p\mathcal{O}_F$.

5. Beweisen Sie per aufsteigender Induktion entlang i, dass $p \mid a_i$. Nutzen Sie dazu, dass $f(\alpha) = 0$ und multiplizieren Sie den Ausdruck mit einer jeweils geeigneten Potenz von α, um
$$a_i\alpha^{n-1} \equiv 0 \qquad \bmod p\mathcal{O}_F$$
zu erhalten. Man kann wieder mit Normen hantieren.

6. Folgern Sie die Behauptung, d.h. zeigen Sie insbesondere, dass $F = \mathbb{Q}(\alpha)$.