

# Elementargeometrie Sommersemester 2021

Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter

Fassung vom 27. Juli 2021

**Dies ist ein Vorlesungsskript und kein Lehrbuch.  
Mit Fehlern muss gerechnet werden!**

Math. Institut  
Ernst-Zermelo-Str. 1  
79104 Freiburg

0761-203-5560  
annette.huber@math.uni-freiburg.de



# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Beispiele</b>	<b>5</b>
1.1	Affine Geometrie . . . . .	6
1.2	Projektive Geometrie . . . . .	9
1.3	Sphärische Geometrie . . . . .	10
1.4	Die hyperbolische Ebene . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Symmetrien</b>	<b>13</b>
2.1	Affine Geometrie . . . . .	14
2.2	Projektive Geometrie . . . . .	17
2.3	Hyperbolische Geometrie . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Die Axiome der euklidischen Ebene</b>	<b>25</b>
3.1	Die Zwischenrelation . . . . .	25
3.2	Kongruenzen . . . . .	30
3.3	Das Parallelenaxiom . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Charakterisierung der euklidischen Ebene</b>	<b>35</b>
4.1	Axiomatische Charakterisierung von Spiegelungen . . . . .	35
4.2	Axiomatische Charakterisierung von Verschiebungen . . . . .	38
4.3	Koordinatisierung . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Möbiusgeometrie</b>	<b>49</b>
5.1	Operation von Möbiustransformationen . . . . .	49
5.1.1	Die hyperbolische Ebene als fast-euklidische Geometrie . . . . .	52
<b>6</b>	<b>Kongruenzsätze</b>	<b>55</b>
<b>7</b>	<b>Längen und Flächen</b>	<b>59</b>



# Kapitel 0

## Einleitung

Bevor es losgeht, soll erklärt werden, was die Ziele der Vorlesung sind. Unser Gegenstand ist die *Geometrie der Ebene und des Raumes*. Wir greifen Fragen und Begriffe auf, die aus der Schule bekannt sind. Hierin liegt der besondere Schulbezug der Vorlesung, die ja im polyvalenten Bachelor Pflicht ist. Aber es ist auch ein spannender Gegenstand für Studierende des Bachelor of Science. Historische Aspekte sind wichtig, auch wenn dies keine Vorlesung zur Geschichte der Mathematik sein kann.

Wir beginnen mit einem Beispiel, das Sie vermutlich kennen.

**Satz 0.1.** *Die Winkelsumme in einem Dreieck in der Ebene ist  $180^\circ$ .*

Erinnern Sie sich an den Beweis?

*Beweis:* Seien  $A, B, C$  die Ecken des Dreiecks mit den jeweiligen Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$ . Wir betrachten die Parallele  $L$  zu  $AB$  durch  $C$  und verlängern die Seiten  $AC$  um  $BC$  durch  $C$  hindurch. Auf der Seite von  $L$ , die dem Dreieck  $ABC$  gegenüberliegt, finden wir drei Winkel. Der mittlere ist genauso groß wie  $\gamma$ . Die beiden anderen sind jeweils so groß wie  $\alpha$  und  $\beta$  (Parallelverschiebung des Winkels). Zusammen erhalten wir einen Winkel von  $180^\circ$ , wie behauptet.  $\square$

Das ist ein wunderschöner Satz. In der ebenen Geometrie gibt es sehr viele andere schöne Sätze. Das ist aber *nicht* der Gegenstand unserer Vorlesung. Stattdessen geht es um die Frage:

*Ist das überhaupt ein korrekter Beweis?*

Die Antwort hängt sehr davon ab, was wir über Winkel voraussetzen. Mindestens das müssen wir klarstellen. Schlimmer: Was ist eigentlich ein Punkt oder eine Gerade? Es ist das große Verdienst der antiken griechischen Mathematik sich genau diese Frage gestellt zu haben. Eine Antwort gibt Euklid in den *Elementen*. Seine *axiomatische Methode* ist zum Standard in der Mathematik geworden und Ihnen seit der ersten Vorlesungsstunde begegnet.

So steht es bei Euklid (zitiert nach Geyer: Vorlesung über antike Mathematik, SS 2001, Bielefeld): *Definitionen*

- (i) *Punkt ist, was ohne Teil ist.*
- (ii) *Linie ist Länge ohne Breite.*
- (iii) *Die Enden einer Linie sind Punkte.*
- (iv) *Gerade (genauer: Strecke, denn geometrische Objekte sind bei Euklid stets begrenzt) ist eine Linie, die gleichmäßig zu den Punkten auf ihr liegt.*
- (v) *Fläche ist, was nur Länge und Breite hat.*
- (vi) *Die Enden einer Fläche sind Linien.*
- (vii) *Ebene ist eine Fläche, die gleichmäßig zu den Strecken auf ihr liegt.*
- (viii) *...*

*Postulate*

- (i) *Von jedem Punkt zu jedem anderen kann man die Strecke ziehen.*
- (ii) *Jede Strecke kann man zu einer Geraden verlängern.*
- (iii) *Zu Mittelpunkt und Radius (Abstand) kann man den Kreis zeichnen.*
- (iv) *Alle rechten Winkel sind gleich.*
- (v) *Wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, daß innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann werden sich die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.*

In der Umkehrung kann die letzte Aussage klarer formuliert werden: *Stufenwinkel an Parallelen sind gleich.* Wir haben diese Eigenschaft im Beweis von Satz 0.1 benutzt. Schon seit der Antike war dieses Axiom umstritten. Sollte man diese Aussage nicht herleiten können? Viele Beweisversuche und 2000 Jahre später wurde schließlich klar: Nein!

Bolyai, Lobaschewsky und Gauß konstruierten Anfang des 19. Jahrhunderts (unabhängig) eine *nicht-euklidische Geometrie*, in der das Parallelnaxiom (und auch der Satz von der Winkelsumme im Dreieck) falsch sind, alle anderen Postulate aber erfüllt sind.

Neben diesem inhaltlichen Problem gibt es auch die Frage, wie Definition von Punkt, Linie, Gerade und Ebene denn nun zu verstehen ist. Die moderne Mathematik hat hier eine radikale Lösung, mit der Euklid vielleicht nicht zufrieden gewesen wäre: Wir arbeiten einfach mit zwei Mengen. Die Elemente der einen nennen wir Punkte, die der anderen nennen wir Geraden. Auf dieser Basis formulierte Hilbert 1899 ein Axiomensystem. Die Entwicklung war damit nicht

abgeschlossen: Tarski formulierte in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts eine kürzere Version in der Sprache der Logik erster Stufe, die ohne Mengelehre auskommt.

Wir werden in der Vorlesung eine Variante von Hilberts Zugang behandeln, den ich dem Skript von Wolfgang Soergel zur Elementargeometrie entlehne. Sein Zugang stellt den Begriff der *Kongruenzabbildungen* und damit der *Symmetrien der Ebene* in den Vordergrund. Auch diese Idee ist immens wichtig, weit über unser konkretes Beispiel hinaus. In der Physik ist die Mathematikerin Emmy Noether weltberühmt, weil sie bewies, dass jede Erhaltungsgröße (Energie, Impuls, ...) zu einer Symmetrieeigenschaft des Systems gehört.

## Fazit

Lernziel der Vorlesung (und aus meiner Sicht der Schulgeometrie) sind die axiomatische Methode und die Umsetzung der Idee der Symmetrie.

## Überblick

- Wir beginnen mit dem Begriff der Inzidenzgeometrie und lernen sehr viele, verschiedene Beispiele kennen: affine, projektive und hyperbolische Ebenen.
- Wir nähern uns der euklidischen Ebene an, in dem wir Anordnungs- und Kongruenzaxiome ergänzen.
- Die Rolle des Parallelenaxioms.
- Die Euklidische Ebene im Sinne Hilberts.

Damit ist der erste Block zur Axiomatisierung abgeschlossen. Danach wird es etwas eklektisch. Weitere mögliche Themen:

- Exemplarische Sätze der ebenen Geometrie
- Projektionen und projektive Geometrie
- Kegelschnitte
- Platonische Körper
- Längen- und Flächenmessung





# Kapitel 1

## Beispiele

Was ist eigentlich die Ebene? Hier die intuitive Antwort:

**Definition 1.1.** *Die Ebene ist wie ein Stück Papier, nur in alle Richtungen unbegrenzt. Eine Gerade ist wie ein Bleistiftstrich, nur ohne Breite. Ein Punkte hat keine Ausdehnung.*

Das ist jetzt arg nah an Euklids Definition und gerade nicht, was wir wollen. Sie ist hier aufgeführt, weil es die Definition ist, mit der wir in Wirklichkeit arbeiten, wenn uns geometrische Argumente überlegen. Als heuristisches Werkzeug, also zum Finden von Beweisen, ist es legitim. Es muss aber immer der zweite Schritte folgen: die Übersetzung in einen formal sauberen Beweis, der auf sauberen Axiomen aufbaut.

Zweiter Versuch:

**Definition 1.2.** *Die Ebene ist  $\mathbb{R}^2$  mit dem Standardskalarprodukt.*

Das Skalarprodukt wird benutzt, um Längen von Strecken und Größen von Winkeln festzulegen. (Wenn Sie parallel LA 2 hören, eventuell etwas Geduld.) Diese Definition ist mathematisch sauber und tatsächlich allgemein akzeptiert. Diese *analytische Geometrie*, in der alles in Koordinaten beschrieben wird, geht auf Descartes zurück und sehr erfolgreich. Dennoch ist die Definition unbefriedigend: Euklid kannte keine reellen Zahlen - tatsächlich noch nicht einmal rationale Zahlen. Um die Größe eines Winkels zu definieren, wird die Cosinus-Funktion benutzt. Reelle Zahlen, trigonometrische Funktionen - das sind sehr anspruchsvolle Konzepte. Wird das wirklich gebraucht, um über Dreiecke zu reden?

In der *synthetischen Geometrie* wird statt dessen die *euklidische Ebene* als eine Inzidenzgeometrie mit Zusatzstruktur definieren, die gewisse Eigenschaften hat. Das wird ein wenig dauern.

**Definition 1.3.** *Eine Inzidenzgeometrie ist ein Paar  $(X, G)$  bestehend aus einer Menge  $X$  mit einem System von Teilmengen  $G \subset \mathcal{P}(X)$  so dass*

- (i) *jedes  $g \in G$  hat mindestens zwei Elemente,*

(ii) für je zwei Elemente  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$  gibt es genau ein  $g \in G$  mit  $x, y \in g$ .

Die Elemente von  $X$  nennen wir *Punkte*, die Elemente von  $G$  *Geraden*. Falls  $x \in g \in G$ , so sagen wir, dass  $x$  auf  $g$  liegt oder dass  $x$  mit  $g$  *inzidiert*.

Eine Menge von Punkten einer Inzidenzgeometrie, die auf einer gemeinsamen Geraden liegen, heißt *kollinear*. Eine Menge von Geraden einer Inzidenzgeometrie, die einen Punkt gemeinsam haben, heißt *konfluent*. Eine Menge von drei nicht kollinearen Punkten heißt ein *Dreieck*.

Wir werden uns jetzt Zeit nehmen und viele wichtige Beispiele einführen, die wir später genauer studieren wollen.

## 1.1 Affine Geometrie

Wir fixieren einen Körper  $k$ .

**Definition 1.4.** Sei  $W$  ein Vektorraum,  $V \subset W$  ein Untervektorraum,  $w_0 \in W$  ein Element. Dann heißt die Menge

$$A = w_0 + V = \{w_0 + v \mid v \in V\}$$

affiner Teilraum von  $W$ . Wir setzen  $\dim A = \dim V$ . Falls  $\dim A = 1$ , so heißt  $A$  affine Gerade. Falls  $\dim A = 2$ , so heißt  $A$  affine Ebene.

**Bemerkung.** Wir müssen sorgfältig zwischen 1-dimensionalen Untervektorräumen und affinen Geraden unterscheiden. Beide werden oft einfach als Gerade bezeichnet.

Der Vektorraum  $V$  ist durch die Menge  $A$  eindeutig bestimmt.

**Definition 1.5.** Sei  $W$  ein Vektorraum,  $A \subset W$  affiner Teilraum. Für  $x, x' \in A$  heißt

$$\overrightarrow{xx'} = x' - x$$

Richtungsvektor von  $x$  nach  $x'$ .

Ist  $A = x_0 + V$ , so liegen diese Richtungsvektoren in  $V$ . Wir erhalten umgekehrt  $V$  als die Menge der Richtungsvektoren für Paare von Punkten in  $A$ .

Und warum wir das Ganze machen:

**Satz 1.6.** Sei  $A$  ein affiner Raum,  $G \subset \mathcal{P}(A)$  die Menge der affinen Geraden. Dann ist  $(A, G)$  eine Inzidenzgeometrie.

*Beweis:* Jeder Körper hat wenigstens zwei Elemente, daher enthält jede affine Gerade  $g$  zwei Punkte.

Seien  $x \neq y$  zwei Punkte von  $A$ . Sie liegen auf der Geraden

$$g = x + k(y - x)$$

denn

$$x = x + 0(y - x), \quad y = x + 1(y - x).$$

Nun zeigen wir die Eindeutigkeit. Sei also

$$g' = x_0 + kv.$$

Da  $x, y \in g'$  gibt es  $\lambda, \mu$  mit

$$x = x_0 + \lambda v, \quad y = x_0 + \mu v.$$

Daraus folgt

$$y - x = (\mu - \lambda)v.$$

Wegen  $x \neq y$  ist der Vorfaktor ungleich 0. Daher haben  $g$  und  $g'$  dieselben Richtungsvektoren. Damit sind  $g$  und  $g'$  Nebenklassen desselben Untervektorraums  $U = \langle v \rangle = \langle y - x \rangle$  von  $W$ .

Zwei Nebenklassen von  $U$  sind genau dann gleich, wenn sie ein Element gemeinsam haben (LA 1, Algebra oder Übungsaufgabe). Also sind die affinen Geraden gleich.  $\square$

**Definition 1.7.** Sei  $A$  ein affiner Raum. Zwei affine Geraden in  $A$  heißen parallel, wenn sie denselben Raum von Richtungsvektoren haben.

**Bemerkung.** Dies ist die übliche Definition in der affinen Geometrie. Im Kontext von Inzidenzgeometrien nennt man oft disjunkte Geraden parallel. Die beiden Definition stimmen nur für affine Ebenen (fast) überein.

**Korollar 1.8.** Parallele Geraden sind gleich oder disjunkt. Zu jeder Geraden  $g$  und jedem Punkt  $x \in A$  genau eine zu  $g$  parallele Gerade  $g'$  mit  $x \in g'$ .

*Beweis:* Sei  $U$  der Raum der Richtungsvektoren der parallelen Geraden. Die Geraden parallel zu  $U$  sind die Nebenklassen von  $U$  in einem größeren Vektorraum. Sie sind also gleich oder disjunkt.

Gegeben  $U$  und  $x$ , die gesuchte Gerade ist  $g' = x + U$ .  $\square$

Im allgemeinen sind disjunkte Geraden nicht parallel. Man nennt sie dann *windschief*.

**Satz 1.9.** Sei  $\dim A = 2$ . Zwei Geraden sind genau dann parallel, wenn sie disjunkt oder gleich sind. Äquivalent: Sind  $g, g'$  nicht parallel, so haben sie einen eindeutigen Schnittpunkt.

*Beweis:* Seien  $g, g'$  nicht parallel. Die Eindeutigkeit des Schnittpunktes ist bereits Teil der Eigenschaften einer Inzidenzgeometrie. Zu zeigen ist also die Existenz. Seien  $v, v'$  die Richtungsvektoren von  $g$  und  $g'$ . Sie bilden eine Basis von  $V$ . Seien  $x, x'$  Punkte in  $g, g'$ . Dann ist  $x' = x + \lambda v + \lambda' v'$ . Gesucht sind  $a, b \in k$ , so dass

$$y = x + av = x' + bv' = x + \lambda v + \lambda' v' + bv'$$

Es folgt

$$av = \lambda v + (\lambda' + b)v'$$

Also wird das Problem durch

$$a = \lambda, b = -\lambda'$$

gelöst. □

Zum Abschluss wollen wir eine alternative Beschreibung von affinen Räumen kennenlernen.

**Lemma 1.10.** *Sei  $A \subset W$  affiner Teilraum des Vektorraums  $W$  mit Raum von Richtungsvektoren  $V$ . Die Abbildung*

$$V \times A \rightarrow A, (v, x) \mapsto x + v$$

*ist eine einfach transitive Operation der Gruppe  $(V, +)$  auf der Menge  $A$ .*

Wir wiederholen die Begriffe:

**Definition 1.11.** *Sei  $G$  eine Gruppe,  $M$  eine Menge. Eine Abbildung*

$$\mu : G \times M \rightarrow M$$

*heißt Operation, wenn gilt*

$$(i) \mu(e, m) = m \text{ für alle } m \in M;$$

$$(ii) \mu(g, \mu(h, m)) = \mu(gh, m) \text{ für alle } m \in M, g, h \in G.$$

*Sie heißt transitiv, wenn es für jedes  $m, m' \in M$  ein  $g \in G$  gibt mit  $\mu(g, m) = m'$ . Sie heißt einfach transitiv wenn es für jedes  $m, m' \in M$  genau ein solches  $g$  gibt.*

Wir schreiben oft  $\mu(g, m) = gm$ . Für jedes  $m \in M$  heißt die Menge  $Gm = \{gm | g \in G\}$  Bahn von  $m$ . Die Untergruppe  $G_m = \{g \in G | gm = m\}$  heißt Standgruppe von  $m$ . Die Operation ist transitiv, wenn es nur eine einzige Bahn gibt. Sie ist einfach transitiv, wenn zusätzlich  $G_m = \{e\}$  für ein/jedes Element von  $M$ .

*Beweis des Lemmas.* Der Vektorraum  $W$  ist insbesondere eine Gruppe. Wir können die Vektoraddition als Operation von  $W$  auf  $W$  auffassen. Diese Operation wird dann eingeschränkt auf  $V \times A$ . Die Rechenregeln sind automatisch erfüllt. Zu zeigen ist nur, dass das Bild in  $A$  liegt. Das ist offensichtlich richtig.

Wir haben oben gesehen, wie wir den Richtungsvektor aus den beiden Punkten berechnen, insbesondere existiert er und ist eindeutig bestimmg. □

Damit sind wir bei der endgültigen Definition angekommen:

**Definition 1.12.** Sei  $k$  ein Körper,  $V$  ein  $k$ -Vektorraum. Ein affiner Raum zum Vektorraum  $V$  ist eine Menge  $A$  zusammen mit einer einfach transitiven Operation von  $(V, +)$  auf  $A$ .

Für  $x, y \in A$  schreiben wir  $v = \overrightarrow{xy}$  für den eindeutigen Vektor mit  $\mu(v, x) = y$ .

Alles, was wir über affine Teilräume gesagt haben, gilt auch für diese abstrakten affinen Räume.

## 1.2 Projektive Geometrie

Sei weiter  $k$  ein beliebiger Körper.

**Definition 1.13.** Sei  $V$  ein  $k$ -Vektorraum. Der projektive Raum  $\mathbb{P}(V)$  über  $V$  ist die Menge der Nullpunktsgersten in  $V$ , d.h. die Menge der Untervektorräume der Dimension 1. Wir definieren  $\dim \mathbb{P}(V) = \dim V - 1$ . Eine projektive Ebene bzw. projektive Gerade ist ein projektiver Raum der Dimension 2 bzw. 1.

Eine Teilmenge von  $\mathbb{P}(V)$  ist ein projektiver Unterraum, wenn sie von der Form  $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$ .

Ist  $v \in V \setminus \{0\}$ , so schreiben wir  $[v]$  für den Punkt (d.h. die Nullpunktsgerade), der durch  $U = \langle v \rangle$  definiert wird. Speziell für  $V = k^n$  definieren wir so die homogenen Koordinaten  $[x_0 : \dots : x_n] = [(x_0, \dots, x_n)]$  auf  $\mathbb{P}^n(k) = \mathbb{P}(k^{n+1})$ .

**Bemerkung.** Alternativ können wir  $\mathbb{P}(V)$  definieren als

$$V \setminus \{0\} / \sim$$

wobei  $v \sim v'$  genau dann, wenn es  $\lambda \in k^*$  gibt mit  $v = \lambda v'$ .

**Satz 1.14.** Sei  $V$  ein Vektorraum. Dann ist  $\mathbb{P}(V)$  mit der Menge der projektiven Geraden in  $\mathbb{P}(V)$  eine Inzidenzgeometrie.

*Beweis:* Sei  $g$  eine projektive Gerade, also  $g = \mathbb{P}(U)$  für einen Untervektorraum  $U \subset V$  der Dimension 2. Er enthält zwei linear unabhängige Vektoren, die zwei verschiedene Punkte auf  $g$  definieren.

Seien  $x, y \in \mathbb{P}(V)$ . Nach Definition ist  $x = \langle v \rangle$ ,  $y = \langle w \rangle$ . Die Bedingung  $x \neq y$  bedeutet, dass  $v$  und  $w$  linear unabhängig sind. Also hat  $U = \langle x, y \rangle$  die Dimension 2. Die gesuchte Gerade ist  $\mathbb{P}(U)$ . Sie ist eindeutig.  $\square$

Wie steht es mit den Parallelen?

**Satz 1.15.** Zwei verschiedene Geraden haben in der projektiven Ebene genau einen Schnittpunkt.

*Beweis:* Es gibt höchstens einen Schnittpunkt, weil eine Inzidenzgeometrie vorliegt. Sei  $g_1 = \mathbb{P}(U_1)$ ,  $g_2 = \mathbb{P}(U_2)$  für 2-dimensionale Unterräume von  $V$ , wobei  $\dim V = 3$ . Die Menge der Schnittpunkte ist  $\mathbb{P}(U_1 \cap U_2)$ .

Nach der Dimensionsformel gilt

$$\dim U_1 \cap U_2 + \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 = 4.$$

Wegen  $\dim U_1 + U_2 \leq 3$  folgt  $\dim U_1 \cap U_2 \geq 1$ . Die Menge der Schnittpunkte ist also nicht-leer.  $\square$

**Bemerkung.** Die Abbildung

$$(x, y) \mapsto [x : y : 1]$$

definiert eine Einbettung der affinen Ebene  $k^2$  in die projektive Ebene  $\mathbb{P}^2(k)$ . Jede affine Gerade setzt sich zu einer eindeutigen projektiven Geraden fort. Parallele Geraden schneiden sich "im Unendlichen", genauer auf der unendlich fernen Geraden  $\mathbb{P}(U)$  mit  $U = \{(x, y, 0) \in k^3\}$ . Hoffentlich werden wir darauf noch ausführlicher zu sprechen kommen.

### 1.3 Sphärische Geometrie

Diesmal arbeiten wir über  $\mathbb{R}$ .

**Definition 1.16.** Sei  $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$  die 2-Sphäre. Ein Großkreis auf  $S^2$  ist der Schnitt von  $S^2$  mit einem 2-dimensionalen Untervektorraum (bzw. Ebene durch den Nullpunkt) in  $\mathbb{R}^3$ .

**Beispiel.** Auf dem Globus sind der Äquator und die Längengrade Großkreise, nicht aber die Breitenkreise.

**Lemma 1.17.** Zwei verschiedene Großkreise schneiden sich in genau 2 Punkten.

*Beweis:* Die beiden zugehörigen Nullpunktsebenen schneiden sich in einer Geraden. Die Schnittpunkt dieser Geraden mit  $S^2$  sind genau die Schnittpunkte der beiden Großkreise. Auf jeder Geraden durch 0 gibt es genau zwei Elemente vom Betrag 1, also zwei Schnittpunkte.  $\square$

**Bemerkung.** Die Sphäre mit der Menge der Großkreise ist also *keine* Inzidenzgeometrie. Das ist ärgerlich, denn natürlich ist Geometrie auf der Kugeloberfläche von enormer praktischer Bedeutung. Vielleicht ist der Begriff einer Inzidenzgeometrie doch nicht so gut? Definitionen sind willkürlich. Sie sind mehr oder weniger geschickt, nicht richtig oder falsch. Da unser Hauptziel das Verständnis der euklidischen Ebene ist, bleiben wir dabei.

Wir erhalten eine Inzidenzgeometrie, indem wir gegenüberliegende Punkte der Kugel identifizieren.

**Definition 1.18.** Wir definieren auf  $S^2$  die Äquivalenzrelation

$$x \sim x' \Leftrightarrow x = \pm x'.$$

**Satz 1.19.**  $S^2 / \sim$  mit den Bildern der Großkreise als Geraden ist eine Inzidenzgeometrie.

*Beweis:* Jetzt haben je zwei Geraden genau einen Schnittpunkt.  $\square$

**Bemerkung.** Es gilt  $S^2 / \sim = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . (Übungsaufgabe) Es handelt sich also nicht um ein neues Beispiel.

## 1.4 Die hyperbolische Ebene

**Definition 1.20.** Die hyperbolische Ebene  $\mathbb{H}^2$  besteht aus der Menge von Punkten

$$\mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{>0} \cong \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}.$$

Die hyperbolischen Geraden sind die Teilmengen von der Form

$$L_x = \{(x, y) \mid y > 0\}$$

(Halbgeraden senkrecht auf der reellen Achse) oder

$$h_{(x_0, r)} = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2 \mid \|(x - x_0, y)\| = r\}$$

(Halbkreise mit Mittelpunkt auf der reellen Achse).

Beide Sorten von Geraden treffen im rechten Winkel auf die reelle Achse.

**Satz 1.21.** Die hyperbolische Ebene ist eine Inzidenzgeometrie.

*Beweis:* Jede hyperbolische Gerade enthält mehr als einen Punkt. Seien  $P = (x, y)$  und  $P' = (x', y')$  zwei verschiedene Punkte. Gilt  $x = x'$ , so liegen beide auf der hyperbolischen Geraden  $l_x$ . Sei nun  $x \neq x'$ . Zu jedem Mittelpunkt  $(x_0, 0)$  liegt  $P$  genau dann auf dem Halbkreis  $h_{(x_0, r)}$ , wenn  $r = \|(x - x_0, y)\|$ . Damit liegen  $P$  und  $P'$  beide auf dem Halbkreis, wenn

$$\|(x - x_0, y)\| = \|(x' - x_0, y')\|.$$

Das ist die Gleichung

$$x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 = x'^2 - 2x_0x' + x_0^2 + y'^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - x'^2 - y'^2 = 2(x - x')x_0$$

Wegen  $x \neq x'$  ist dies eindeutig lösbar. Also existiert der Halbkreis und ist eindeutig bestimmt.  $\square$

**Satz 1.22.** In der hyperbolischen Ebene gibt es zu jeder Gerade  $g$  und jedem Punkt  $P$  ausserhalb der Geraden gibt es unendlich viele Geraden, die disjunkt zu  $g$  sind ("parallel") und durch  $P$  verlaufen.

*Beweis:* Wir beweisen nur einen Spezialfall. Der allgemeine Fall folgt, wenn wir die Symmetrien der hyperbolischen Ebene verstehen. Sei  $g$  die  $y$ -Achse,  $P = (1, 1)$ . Zu jedem Punkt  $(x_0, 0)$  auf der reellen Achse gibt es genau einen Kreis, der durch  $(1, 1)$  läuft. Er hat den Radius  $\|(x_0 - 1, 1)\|$ . Er ist disjunkt von  $g$ , wenn  $x_0 > 0$ ,  $r < x_0$ , also

$$(x_0 - 1)^2 + 1 = x_0^2 - 2x_0 + 2 < x_0^2 \Leftrightarrow -2x_0 + 2 < 0 \Leftrightarrow x_0 > 1$$

Dies sind unendlich viele Kreise. □

Dies ist das wichtigste Beispiel einer *nicht-euklidischen Geometrie*, deren Existenz eine große Überraschung war. Wir werden sie noch genauer kennenlernen.

**Bemerkung.** Ein anderes Modell der hyperbolischen Ebene erhält man mit der offenen Einheitskreisscheibe, und als hyperbolische Geraden alle Geraden durch den Mittelpunkt und den Kreise, die senkrecht auf dem Rand stehen. Die beiden Modelle werden durch Multiplikation mit einer geeigneten Matrix ineinander überführt.



## Kapitel 2

# Symmetrien

Wir wollen uns nun mit den *Symmetrien* der geometrischen Objekte beschäftigen, die wir eingeführt haben. Mathematisch: Wir führen den Begriff des Isomorphismus ein und studieren die Gruppe der *Automorphismen*.

**Definition 2.1.** *Seien  $(X, G)$  und  $(X', G')$  Inzidenzgeometrien. Eine Abbildung von Inzidenzgeometrien ist eine Abbildung  $\phi : X \rightarrow X'$  von Mengen, die Geraden in Geraden abbildet, d.h. so dass für alle  $g \in G$  gilt*

$$\phi(g) = \{\phi(x) | x \in g\} \in G'.$$

*Eine Abbildung von Inzidenzgeometrien heißt Isomorphismus, wenn  $\phi$  bijektiv ist.*

Die entscheidende Eigenschaft eines Isomorphismus ist immer (für Vektorräume, Gruppen, topologische Räume, ...), dass auch die Umkehrung die Bedingung an eine Abbildung im jeweiligen Setting erfüllt. Wenn es nicht automatisch ist, so muss man es fordern. In unserem Fall ist es eine Konsequenz.

**Lemma 2.2.** *Sei  $\phi : (X, G) \rightarrow (X', G')$  ein Isomorphismus von Inzidenzgeometrien. Dann bildet auch die Umkehrabbildung  $\phi^{-1} : X' \rightarrow X$  Geraden in Geraden ab.*

*Beweis:* Sei  $g' \in G'$  eine Gerade,  $x' \neq y'$  zwei Punkte von  $g'$ . Da  $\phi^{-1}$  bijektiv ist, sind  $x = \phi^{-1}(x')$  und  $y = \phi^{-1}(y')$  verschieden in  $X$  und legen eine eindeutige Gerade  $g$  fest. Wir wollen zeigen, dass  $\phi^{-1}(g') = g$ .

Sei  $P' \in g'$ ,  $P = \phi^{-1}(P')$ . Sei  $g_P$  die eindeutige Gerade durch  $x$  und  $P$ . Ihr Bild  $\phi(g_P)$  enthält die Punkte  $x'$  und  $P'$ , ist also die Gerade  $g'$ . Insbesondere ist  $y' \in \phi(g_P)$ , also  $y \in g_P$ . Da die Gerade durch  $x$  und  $y$  eindeutig ist, gilt  $g = g_P$  und  $P \in g$ , wie wir wollten.

Sei  $Q \in g$ . Wir müssen noch zeigen, dass  $Q \in \phi^{-1}(g')$ . Der Bildpunkt  $Q' = \phi(Q)$  liegt in  $\phi(g) = g'$ . Also ist  $Q = \phi^{-1}(Q') \in \phi^{-1}(g')$ .  $\square$

**Korollar 2.3.** *Die Automorphismen einer Inzidenzgeometrie  $(X, G)$ , d.h. die Menge der Isomorphismen als Inzidenzgeometrie, bilden eine Gruppe.*

*Beweis:* Wir haben gesehen, dass mit  $\phi$  auch  $\phi^{-1}$  ein Isomorphismus von Inzidenzgeometrien ist. Es ist leicht zu sehen, dass die Komposition zweier Isomorphismen ein Isomorphismus ist. Daher ist  $\text{Aut}(X, G) \subset S(X)$  eine Untergruppe der Gruppe aller Permutationen von  $X$ .  $\square$

Wir gehen jetzt unsere drei Beispielgeometrien durch, um interessante Beispiele von Abbildungen von Inzidenzgeometrien zu sehen. Besonders wichtig sind die Automorphismen.

## 2.1 Affine Geometrie

Wir fixieren einen Körper  $k$ . Sei  $A$  affiner Raum zum Vektorraum  $V$ , d.h. gegeben ist eine einfach transitive Operation

$$\mu : V \times A \rightarrow A.$$

Wir schreiben suggestiv  $x + v = \mu(v, x)$ . Das ist konsistent mit der Situation eines affinen Teilraums  $A \subset W$  eines Vektorraums.

**Definition 2.4.** Seien  $A, A'$  affine Räume über den Vektorräumen  $V$  und  $V'$ . Eine affine Abbildung von  $A$  nach  $A'$  ist ein Paar  $(\phi, f)$  bestehend aus einer  $k$ -linearen Abbildung  $f : V \rightarrow V'$  und einer Abbildung von Mengen  $\phi : A \rightarrow A'$ , die verträglich mit der Operation ist, d.h. für alle  $v \in V, x \in A$  gilt

$$\phi(x + v) = \phi(x) + f(v)$$

Sie heißt Isomorphismus, wenn  $\phi$  bijektiv ist. Die Automorphismen eines affinen Raums heißen auch affine Bewegungen.

Etwas übersichtlicher: Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V \times A & \xrightarrow{+} & A \\ (f, \phi) \downarrow & & \downarrow \phi \\ V' \times A' & \xrightarrow{+} & A' \end{array}$$

kommutiert. Wir schreiben oft verkürzend  $\phi$  statt  $(\phi, f)$ .

**Bemerkung.** Aus der Operationsbedingung folgt

$$f(\overrightarrow{xy}) = \overrightarrow{\phi(x)\phi(y)}.$$

Die lineare Abbildung  $f$  ist also eindeutig durch  $\phi$  bestimmt. Eine Abbildung  $\phi : A \rightarrow A'$  ist affin, wenn die zugehörige Abbildung  $f$  wohldefiniert ist (also  $f(v)$  nicht davon abhängt, wie man  $v$  als Richtungsvektor schreibt) und linear.

Ist  $\phi$  bijektiv, dann auch  $f$ . Das Paar  $(\phi^{-1}, f^{-1})$  ist invers zu  $(\phi, f)$ . Daher bilden die Automorphismen eines affinen Raums eine Gruppe.

**Beispiel.** (i) Sei  $A$  affiner Raum zum Vektorraum  $V$ ,  $v \in V$ . Dann ist

$$\tau_v : A \rightarrow A, \quad x \mapsto x + v$$

eine affine Abbildung. Die zugehörige lineare Abbildung  $f : V \rightarrow V$  ist die Identität, denn  $(x + v)(y + v) = \overrightarrow{x\tilde{y}}$ . (Klar für affine Teilräume, Übungsaufgabe im allgemeinen.) Wir nennen die Abbildung *Verschiebung um  $v$* .

(ii) Sei wieder  $A$  affiner Raum zum Vektorraum  $V$ ,  $x_0 \in A$ ,  $f : V \rightarrow V$  linear. Dann ist

$$\phi_{x_0, f} : A \rightarrow A, \quad x_0 + v \mapsto x_0 + f(v)$$

eine affine Abbildung, die  $x_0$  festhält. Die zugehörige lineare Abbildung ist  $f$  selbst.

Was passiert mit affinen Geraden? Allgemeiner:

**Lemma 2.5.** *Sei  $A$  ein affiner Raum,  $B \subset A$  ein affiner Teilraum (d.h. die Menge  $U$  der Richtungsvektoren  $\overrightarrow{xy}$  für  $x, y \in B$  ist ein Untervektorraum von  $V$ ),  $\phi : A \rightarrow A'$  eine affine Abbildung. Dann ist  $\phi(B) \subset A'$  ein affiner Teilraum.*

*Beweis:* Sei  $B' = \phi(B)$ ,  $U' = f(U)$ . Wir zeigen, dass  $B'$  affiner Raum zu  $U'$  ist. Durch Einschränken erhalten wir eine Abbildung

$$\mu' : U' \times B' \rightarrow A'.$$

Wir überprüfen als erstes, dass das Bild in  $B'$  landet. Sei  $v' \in U'$ , also  $v' = f(v)$  für  $v \in U$ . Sei  $x' \in B'$ , also  $x' = \phi(x)$  für  $x \in A$ . Dann ist

$$\mu'(v', x') = \mu'(f(v), \phi(x)) = \phi(\mu(v, x))$$

in  $B' = \phi(B)$ , denn  $U$  operiert auf  $B$ . Damit ist die Operation von  $U'$  auf  $B'$  wohldefiniert. Es handelt sich um eine Operation, da  $V'$  auf  $A'$  operiert.

Wir müssen noch verifizieren, dass die Operation einfach transitiv ist. Für  $x', y' \in B'$  (also  $x' = \phi(x)$ ,  $y' = \phi(y)$  mit  $x, y \in B$ ) gilt für den Richtungsvektor

$$\overrightarrow{x'y'} = \overrightarrow{\phi(x)\phi(y)} = f(\overrightarrow{xy}) \in f(U).$$

□

Das Bild einer affinen Geraden ist also ein affiner Unterraum. Die Dimension kann höchstens kleiner werden: entweder eine affine Gerade oder ein Punkt.

**Satz 2.6.** *Jede injektive affine Abbildung ist eine Abbildung von Inzidenzgeometrien. Insbesondere ist jede affine Bewegung eines affinen Raums auch ein Automorphismus als Inzidenzgeometrie.*

*Beweis:* Wenn  $\phi$  injektiv ist, dann ist das Bild eines 1-dimensionalen affinen Teilraums ebenfalls 1-dimensional, also eine Gerade. □

Gilt auch die Umkehrung? Nein!

**Beispiel.** Sei  $k = \mathbb{C}$ ,  $V = \mathbb{C}^2$ ,  $A = \mathbb{C}^2$  mit der natürlichen Operation. Sei  $\phi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  die Abbildung  $(z_1, z_2) \mapsto (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ . Das Bild der Gerade

$$(x_0, y_0) + \mathbb{C}(x_1, y_1) = \{(x_0 + \lambda x_1, y_0 + \lambda y_1) | \lambda \in \mathbb{C}\}$$

ist die Menge der Punkte

$$\{(\bar{x}_0 + \bar{\lambda} \bar{x}_1, \bar{y}_0 + \bar{\lambda} \bar{y}_1 | \lambda \in \mathbb{C}\} = (\bar{x}_0, \bar{y}_0) + \mathbb{C}(\bar{x}_1, \bar{y}_1),$$

also wieder eine affine Gerade. Daher ist  $\phi$  eine Abbildung von Inzidenzgeometrien. Es handelt sich aber nicht, um eine affine Abbildung, denn die zugehörige Abbildung auf Richtungsvektoren ist wieder  $f = \phi$ , also *nicht*  $\mathbb{C}$ -linear.

Dasselbe Gegenbeispiel funktioniert über jedem Körper, der nicht-triviale Automorphismen hat.

Wir wollen noch etwas genauer ausleuchten, wie affine Bewegungen eigentlich aussehen.

**Satz 2.7.** Sei  $A$  affiner Raum zum Vektorraum  $V$ . Die Abbildung

$$\text{Aut}(A) \rightarrow \text{Aut}(V), \quad (\phi, f) \mapsto f$$

ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern isomorph zu  $V$ .

*Beweis:* Die Abbildung ist offensichtlich verträglich mit Komposition. Jedes  $f \in \text{Aut}(V)$  hat das Urbild  $\phi_{x_0, f}$  in der Notation des Beispiels. Daher ist der Homomorphismus surjektiv. Der Kern sind die affinen Abbildungen von der Form  $(\phi, \text{id})$ . Sei  $x_0 \in A$  beliebig. Wir setzen  $v_0 = \overrightarrow{x_0 \phi(x_0)}$ . Jedes  $x \in A$  kann geschrieben werden als  $x_0 + v$  für ein  $v \in V$ . Daher ist

$$\phi(x) = \phi(x_0 + v) = \phi(x_0) + f(v) = x_0 + v_0 + v = x + v_0.$$

Wir erhalten die Abbildung  $\tau_{v_0}$  in der Notation des Beispiels. Man sieht leicht, dass die Abbildung

$$\tau : V \rightarrow \text{Aut}(A), v_0 \mapsto \tau_{v_0}$$

verträglich ist mit Komposition, also ist der Kern isomorph zu  $(V, +)$ .  $\square$

**Korollar 2.8.** Sei  $A$  affiner Raum,  $x_0 \in A$ . Jede affine Bewegung  $(\phi, f)$  von  $A$  kann eindeutig geschrieben werden als  $\tau_{\overrightarrow{x_0 \phi(x_0)}} \phi_{x_0, f}$ .

*Beweis:*  $\phi \circ \phi_{x_0, f}^{-1}$  induziert auf  $V$  die Identität, liegt also im Kern von  $\text{Aut}(A) \rightarrow \text{Aut}(V)$ . Wir haben gesehen, dass es sich also um eine Translation um einen Vektor  $v_0$  handelt. Wir bestimmen ihn, indem wir das Bild von  $x_0$  berechnen. Dieser Punkt ist ein Fixpunkt von  $\phi_{x_0, f}$ .  $\square$

Werden wir noch konkreter:  $A = V = k^2$ . Jeder affine Bewegung  $A \rightarrow A$  definiert eine Matrix  $M \in \text{Gl}_2(k) = \text{Aut}(V)$ . Mit  $x_0 = (0, 0)$  ist die Abbildung  $\phi_{x_0, M}$  die Multiplikation mit  $M$ . Jeder affine Bewegung ist also die Multiplikation mit einer Matrix, gefolgt von einer Translation. Die beiden Sorten von

Abbildungen kommutieren *nicht*. Das macht das Rechnen unangenehm. Es gibt aber einen schönen Trick:

Wir betten  $k^2$  mittels  $(x, y)^t \mapsto (x, y, 1)^t$  nach  $k^3$  (Spaltenvektoren) ein. Multiplikation mit  $M$  operiert als Multiplikation mit der erweiterten Matrix

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Translation um  $v = (a, b)^t$  operiert als Multiplikation mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Komposition ist dann gegeben durch die *erweiterte Abbildungsmatrix*

$$\begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Satz 2.9.** *Die Abbildung von der Gruppe der affinen Bewegungen von  $k^2$  nach  $\text{Gl}_3(k)$ , die jeder affinen Bewegung ihre erweiterte Abbildungsmatrix zuordnet, ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus mit Bild die Matrizen deren dritte Zeile die Form  $(0, 0, 1)$  hat.*

*Beweis:* Wir haben gesehen, dass jeder affine Automorphismus in dieser Form geschrieben werden kann. Umgekehrt lässt Multiplikation mit einer Matrix der angegebenen Form den affinen Teilraum  $A' = k^2 \times \{1\} \subset k^3$  invariant und induziert darauf eine affine Abbildung. Hierbei wird aus der Matrixmultiplikation die Komposition von Abbildungen, also ein Gruppenhomomorphismus.  $\square$

**Bemerkung.** Dieser Trick (und die Version für den affinen dreidimensionalen Raum) ist sehr wichtig in praktischen Anwendungen. In der Computergrafik müssen ständig affine Transformationen ausgeführt werden - so kann man einfach den Matrizenkalkül verwenden.

## 2.2 Projektive Geometrie

Sei weiter  $k$  ein beliebiger Körper. Wir betrachten nun Abbildungen auf projektiven Räumen  $\mathbb{P}(V)$  (der Menge der 1-dimensionalen Untervektorräume von des Vektorraums  $V$ ). Ist  $f : V \rightarrow V'$  linear, so werden Untervektorräume auf Untervektorräume abgebildet. Erhalten wir so eine Abbildung  $\mathbb{P}(f) : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ ? Nicht ganz! Nullpunktsgereaden, die in  $\text{Ker}(f)$  enthalten sind, haben als Bild keine Nullpunktgerade, also nicht einen Punkt in  $\mathbb{P}(V')$ . Immerhin:

**Definition 2.10.** *Sei  $f : V \rightarrow V'$  eine  $k$ -lineare Abbildung. Dann heißt*

$$\mathbb{P}(f) : \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(\text{Ker}(f)) \rightarrow \mathbb{P}(V') \quad [v] \mapsto [f(v)]$$

*die von  $f$  induzierte projektive Abbildung. Ist  $f$  bijektiv, so heißt  $\mathbb{P}(f)$  auch Projektivität.*

Projektivitäten sind auf ganz  $\mathbb{P}(V)$  definiert und die Isomorphismen von projektiven Räumen.

**Satz 2.11.** *Ist  $f : V \rightarrow V'$  eine injektive lineare Abbildung, so ist die induzierte projektive Abbildung  $\mathbb{P}(f) : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$  eine Abbildung von Inzidenzgeometrien.*

*Beweis:* Da  $f$  injektiv ist, ist  $\mathbb{P}(f)$  auf ganz  $\mathbb{P}(V)$  definiert. Sei  $g = \mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$  eine projektive Gerade, also  $U \subset V$  ein zwei-dimensionaler Unterraum. Dann ist  $\mathbb{P}(f)(g) = \mathbb{P}(f(U))$ . Da  $f$  injektiv ist, ist  $f(U) \subset V'$  ein Untervektorraum der Dimension 2, definiert also eine projektive Gerade.  $\square$

Gilt die Umkehrung? Wie im affinen Fall: nein, mit demselben Typ von Gegenbeispiel.

**Beispiel.** Die Gruppe der Projektivitäten von  $\mathbb{P}^n(k)$  ist die *projektive lineare Gruppe*

$$\mathrm{PGL}_{n+1}(k) = \mathrm{GL}_{n+1}(k) / \sim$$

wobei  $A \sim \lambda A$  für alle  $\lambda \in k^*$ .

Wir wollen uns jetzt noch das Beispiel  $\mathbb{P}^1(k)$  besonders ausführlich anschauen. Dabei interessiert uns vor allem  $k = \mathbb{C}$ . Wir erinnern uns an die Einbettung

$$k \rightarrow \mathbb{P}^1(k), \quad x \mapsto [x : 1].$$

Sie hat als Komplement nur einen Punkt  $\infty := [1 : 0]$ . In der Funktionentheorie ist die Notation  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  üblich. Gemeint ist dabei  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ , so wie wir es definiert haben.

Wie operiert eine Matrix  $M \in \mathrm{GL}_2(k)$  auf  $\mathbb{P}^1(k)$ ? Sei

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Sie operiert auf  $\mathbb{P}^1(k)$  als  $[v] \mapsto [Mv]$ , also

$$[x : y] \mapsto [ax + by : cx + dy].$$

Speziell für  $y = 1$  erhalten wir also  $[ax + b : cx + d]$ . Ist  $cx + d \neq 0$  (also  $x \neq -d/c$ ), so können wir diesen Punkt auch schreiben als

$$\left[ \frac{ax + b}{cx + d} : 1 \right].$$

Er liegt dann wieder im Bild der affinen Geraden.

**Definition 2.12.** *Eine Abbildung*

$$\phi_M : k \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \rightarrow k$$

von der Form  $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$  für  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(k)$  heißt Möbiustransformation.

Als Abbildung der projektiven Geraden sind Möbiustransformationen bijektiv. Im affinen Teil fehlt  $\phi_M(\infty) = [M(1, 0)] = [a : c] = [a/c : 1]$ . (Im Fall  $c = 0$  ist  $\phi_M(\infty) = \infty$  und die Abbildung ist auf ganz  $k$  definiert.)

**Bemerkung.** Die Formel für  $\phi_M(\infty)$  folgt auch aus der affinen Formel, wenn man den Grenzwert  $x \rightarrow \infty$  bildet. Zumindest über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  handelt es sich um stetige Abbildungen und diese Art von Aussage macht Sinn.

**Bemerkung.** Es gibt hier eine ganze Reihe von verschiedenen Konventionen, die zu unterschiedlichen Formeln führen. Die Einbettung  $k \rightarrow \mathbb{P}^1(k)$  kann wie bei uns als  $x \mapsto [x : 1]$  oder als  $x \mapsto [1 : x]$  gewählt werden. Matrizen können von links auf  $k^2$  operieren (auf Spaltenvektoren) oder von rechts (als Zeilenvektoren). Oder man multipliziert statt mit  $M$  mit  $M^t$  oder  $M^{-1}$ . Leider kommen alle Konventionen in der Literatur vor.

**Beispiel.** (i) Der affine Isomorphismus  $x \mapsto ax + b$  mit  $a \neq 0$  ist eine Möbiustransformation mit

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Die Abbildung  $x \mapsto x^{-1}$  ist die Möbiustransformation zur Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Möbiustransformationen operieren.

**Satz 2.13.** Seien  $M, M' \in \text{Gl}_2(k)$ . Dann gilt

$$\phi_M \circ \phi_{M'} = \phi_{MM'}$$

wo immer beide Seiten definiert sind.

*Beweis:* Man kann das einfach mit der Definition nachrechnen. Eleganter:  $\phi_M$  ist die Einschränkung der Projektivität  $[M]$  auf den affinen Teil. Für Projektivitäten gilt  $[M] \circ [M'] = [MM']$ , weil dies schon für die linearen Abbildungen auf  $k^2$  gilt, die durch Matrixmultiplikation definiert werden.  $\square$

Wissen über  $\text{Gl}_2(k)$  ist Wissen über Möbiustransformationen. Wir erinnern uns aus der linearen Algebra:

**Satz 2.14** (Gauß-Algorithmus). Jede Matrix  $M \in \text{Gl}_2(k)$  ist kann geschrieben werden als Produkt von Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

mit  $b \in k$ ,  $\mu, \lambda \in k^*$ .

*Beweis:* Man beachte, dass

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}.$$

Sei  $A$ . Wir multiplizieren von rechts und links mit Matrizen aus unserem Vorrat, einschließlich der unteren Dreiecksmatrix. Alle wirken als elementare Spalten- und Zeilenumformungen. Nach dem Gauß-Algorithmus erreichen wir die Einheitsmatrix. Also:

$$S_1 \dots S_n A T_1 \dots T_m = E_2 \Rightarrow A = S_n^{-1} \dots S_1^{-1} T_m^{-1} \dots T_1^{-1}$$

mit  $S_i$  und  $T_j$  aus unserem Vorrat.  $\square$

**Korollar 2.15.** *Jede Möbiustransformation ist Komposition von Möbiustransformationen vom Typ  $x \mapsto 1/x$ ,  $x \mapsto ax$ ,  $x \mapsto x + b$  mit geeigneten  $a \in k^*$ ,  $b \in k$ .*

*Beweis:* Die drei Typen von Erzeugern der  $\text{Gl}_2(k)$  operieren als  $x \mapsto 1/x$ ,  $x \mapsto x + b$ ,  $x \mapsto \lambda\mu^{-1}x$ .  $\square$

Das hilft uns im Beweis des nächsten Satzes, der uns viel über die Geometrie von Möbiustransformationen über  $\mathbb{C}$  sagt. Wir fassen hier  $\mathbb{C}$  als Ebene  $\mathbb{R}^2$  auf, die aber nach  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  eingebettet wird. Für die Variable schreiben wir  $z$  statt  $x$ , wie in der Funktionentheorie üblich.

**Beispiel.** Wir berechnen das Bild von  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  unter der Möbistransformation

$$\phi : z \mapsto \frac{z - i}{z + i}$$

Für  $z = x \in \mathbb{R}$  haben Zähler und Nenner denselben Betrag  $\sqrt{x^2 + 1}$ , also gilt

$$\phi(\mathbb{R}) \subset S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Die Umkehrung gilt (fast). Die Umkehrabbildung wird durch die inverse Matrix gegeben, also durch

$$\phi^{-1}(z) = i \frac{1 + z}{1 - z}.$$

Sie ist in  $z = 1$  nicht definiert. Für die anderen Punkte der  $S^1$  verschwindet der Imaginärteil von  $\phi^{-1}(z)$ . Es ist nämlich für  $z = e^{i\omega}$

$$\begin{aligned} \text{Re} \left( \frac{1 + e^{i\omega}}{1 - e^{i\omega}} \right) &= \text{Re} \left( \frac{(1 + e^{i\omega})(1 - e^{-i\omega})}{|1 - e^{i\omega}|^2} \right) \\ &= \frac{1}{|1 - e^{i\omega}|^2} \text{Re}(1 + e^{i\omega} - e^{-i\omega} - 1) = 0 \end{aligned}$$

Genauso verhalten sich alle Möbiustransformationen.



**Satz 2.16.** *Jede Möbiustransformation auf  $\hat{\mathbb{C}}$  bildet eine affine Gerade oder einen Kreis in  $\mathbb{C}$  auf eine affine Gerade oder einen Kreis ab.*

*Beweis:* Es genügt die Erzeuger der Gruppe der Möbiustransformationen zu betrachten. Für  $z \mapsto z + b$  gilt die Aussage offensichtlich. Für  $z \mapsto az$  ebenfalls, denn wir können  $a = re^{i\omega}$  schreiben. Multiplikation mit  $r$  ist eine Streckung, Multiplikation mit  $e^{i\omega}$  eine Drehung. Affine Geraden und Kreise bleiben offensichtlich erhalten.

Es bleibt  $z \mapsto z^{-1}$ . Wir betrachten die affine Gerade

$$g = \{z \in \mathbb{C} \mid a\operatorname{Re}(z) + b\operatorname{Im}(z) + c = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid (a + ib)\bar{z} + (a - ib)z + 2c = 0\}.$$

Wir schreiben abkürzend  $\alpha = a + ib$ . Ist  $u = \phi(z)$ , so erfüllt  $\phi(u) = z$  die Gleichung für  $g$ , also

$$0 = \alpha\overline{\phi(u)} + \bar{\alpha}\phi(u) + 2c = \alpha\bar{u}^{-1} + \bar{\alpha}u^{-1} + 2c$$

und nach Multiplikation mit  $u\bar{u}$

$$0 = \alpha u + \bar{\alpha}\bar{u} + 2cu\bar{u}.$$

Im Fall  $c = 0$  ist dies wieder eine affine Gerade. Im Fall  $c \neq 0$  können wir durch  $2c$  teilen und (mit  $\beta = \alpha/2c$ ) die Gleichung umschreiben als

$$|u + \bar{\beta}|^2 = u\bar{u} + \beta u + \bar{\beta}\bar{u} + \beta\bar{\beta} = \beta\bar{\beta}$$

Dies sind die Punkte auf dem Kreis mit Mittelpunkt  $-\bar{\beta}$  und Radius  $|\beta|$ .

Wir betrachten nun den Kreis  $k$  mit Mittelpunkt  $z_0$  und Radius  $r$ , also

$$k = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\} = \{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} - z_0\bar{z} - \bar{z}_0z + z_0\bar{z}_0 - r^2 = 0\}$$

Ist  $u = \phi(z)$ , so erfüllt  $\phi(u) = z$  die Gleichung für  $k$ , also

$$0 = u^{-1}\bar{u}^{-1} - z_0\bar{u}^{-1} - \bar{z}_0u^{-1} + |z_0|^2 - r^2$$

und nach Multiplikation mit  $u\bar{u}$

$$0 = 1 - z_0u - \bar{z}_0\bar{u} + (|z_0|^2 - r^2)u\bar{u}.$$

Wir schreiben  $d = |z_0|^2 - r^2$ . Für  $d = 0$  ist dies die Gleichung einer affinen Geraden. Für  $d \neq 0$  teilen wir durch  $d$  und erhalten

$$0 = \frac{1}{d} - \frac{z_0}{d}u - \frac{\bar{z}_0}{d}\bar{u} + u\bar{u} = \left(u - \frac{\bar{z}_0}{d}\right)\left(\bar{u} - \frac{z_0}{d}\right) - \frac{|z_0|^2}{d^2} + \frac{1}{d}$$

ist es die Gleichung des Kreises mit Mittelpunkt  $\bar{z}_0/d$  und Radius die Wurzel aus

$$\frac{|z_0|^2}{d^2} - \frac{1}{d} = \frac{|z_0|^2 - d}{d^2} = \frac{r^2}{d}.$$

□

**Bemerkung.** Interessanter als  $z \mapsto z^{-1}$  ist stattdessen  $z \mapsto \bar{z}^{-1}$ . Das ist zwar keine Möbiustransformation, entsteht aber durch die Spiegelung an der reellen Achse, die ebenfalls Kreise in Kreise und Geraden in Geraden abbildet. In Polarkoordinaten ausgedrückt:

$$re^{i\omega} \mapsto r^{-1}e^{i\omega},$$

die *Spiegelung am Einheitskreis*. Sie bildet also ebenfalls affine Geraden oder Kreise in  $\mathbb{R}^2$  in affine Geraden oder Kreise ab.

## 2.3 Hyperbolische Geometrie

Wir konzentrieren uns nun auf die Möbiustransformationen, die die obere Halbebene in sich abbilden. Ist  $M \in \text{PGl}_2(\mathbb{R})$ , so operiert die Abbildung auf  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , bildet also die reelle Gerade in sich ab. Das ist eine notwendige Bedingung. Reicht sie? Nein, denn  $z \mapsto 1/z$  gehört zur Matrix  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  und bildet  $i$  auf  $-i$  ab. Wir leiten die hinreichende Bedingung her, indem wir das Bild von  $i$  berechnen.

**Beispiel.** Sei  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Gl}_2(\mathbb{R})$ . Die zugehörige Möbiustransformation bildet  $i$  ab auf

$$\frac{ai + b}{ci + d} = \frac{(ai + b)(-ci + d)}{c^2 + d^2} = \frac{(ad + bc) + i(ad - bc)}{c^2 + d^2}.$$

Dieser Punkt liegt genau dann in  $\mathbb{H}^2$ , wenn die Determinante positiv ist.

**Definition 2.17.** Sei  $\text{PGl}_2(\mathbb{R})^+ \subset \text{PGl}_2(\mathbb{R})$  die Untergruppe der Matrizen mit positiver Determinante.

Die Bedingung ist wohldefiniert. Sind zwei Matrizen  $M, M'$  äquivalent in  $\text{PGl}_2(\mathbb{R})$ , also  $M = \lambda M'$  für  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  so unterscheidet sich ihre Determinante um eine Quadratzahl, nämlich  $\lambda^2$ .

**Satz 2.18.** Sei  $M \in \text{PGl}_2(\mathbb{R})^+$ . Dann bildet die durch  $M$  definierte Möbiustransformation die obere Halbebene bijektiv auf sich selbst ab. Sie definiert einen Automorphismus der hyperbolischen Ebene als Inzidenzgeometrie.

*Beweis:* Direkte Rechnung. Oder struktureller: Da die Matrix reelle Einträge hat, ist sie auf allen Punkten von  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  definiert. Sie bildet die reelle Gerade in sich ab, ist also eine Bijektion auf  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Sie ist stetig, daher ist das Bild der oberen Halbebene zusammenhängend, also entweder  $\mathbb{H}^2$  oder  $-\mathbb{H}^2$ . Welcher Fall vorliegt, kann man durch Berechnen von  $M(i)$  entscheiden. Das ist gerade unser Beispiel.

Sei  $g$  eine hyperbolische Gerade,  $\tilde{g}$  die euklidische Gerade oder der Kreis, so dass  $\tilde{g} \cap \mathbb{H}^2 = g$ . Man beachte, dass  $\tilde{g}$  stabil unter komplexer Konjugation ist,

also symmetrisch zur reellen Achse liegt. Das Bild von  $\tilde{g}$  unter der Möbiustransformation ist wieder eine Gerade oder ein Kreis. Es ist ebenfalls stabil unter komplexer Konjugation:

$$\frac{\overline{az + b}}{\overline{cz + d}} = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d},$$

also liegt mit  $z \in \tilde{g}$ ,  $\bar{z} \in \tilde{g}$  auch das Bild in  $\phi_M(\tilde{g})$ . Also handelt es sich wieder um eine Gerade bzw. einen Kreis, der symmetrisch zur reellen Achse liegt. Der Schnitt mit  $\mathbb{H}^2$  ist wieder eine hyperbolische Gerade.  $\square$

Ist jeder Automorphismus als Inzidenzgeometrie von dieser Form? Nein!

**Lemma 2.19.** *Die Spiegelung am Einheitskreis  $z \mapsto \bar{z}^{-1}$  respektiert ebenfalls die hyperbolische Ebene und ist ein Automorphismus von Inzidenzgeometrien.*

*Beweis:*  $z \mapsto z^{-1}$  bildet  $\mathbb{H}^2$  auf  $-\mathbb{H}^2$  ab. Spiegelung an der reellen Achse führt zurück nach  $\mathbb{H}^2$ . Dasselbe Argument wie im Satz zeigt, dass es sich um einen Automorphismus der Inzidenzgeometrie handelt.  $\square$

**Definition 2.20.** *Die Gruppe der hyperbolischen Bewegungen ist definiert als die Untergruppe von  $S(\mathbb{H}^2)$ , die von den Möbiustransformationen in  $\text{PG}_1^2(\mathbb{R})^+$  und  $z \mapsto \bar{z}^{-1}$  erzeugt wird.*



## Kapitel 3

# Die Axiome der euklidischen Ebene

In diesem Kapitel erreichen wir unser erstes Ziel: Wir definieren die euklidische Ebene axiomatisch, nämlich als eine Inzidenzgeometrie mit gewissen Zusatzstrukturen (Zwischenrelation, Kongruenzen), die gewisse Eigenschaften haben. Diese verifizieren wir für  $\mathbb{R}^2$ . Tatsächlich wird die euklidische Ebene durch diese Bedingungen eindeutig charakterisiert, genauer: eindeutig bis auf Isomorphismus.

### 3.1 Die Zwischenrelation

Inzidenzgeometrie wird erst interessant, wenn  $X$  mehr als eine Gerade enthält.

**Definition 3.1.** *Wir sagen  $(X, G)$  ist eine Inzidenzgeometrie mit Dreieck, wenn  $(X, G)$  eine Inzidenzgeometrie ist, die drei nicht kollineare Punkte enthält.*

Sei  $(X, G)$  eine Inzidenzgeometrie,  $g \in G$  eine Gerade. Gegeben drei verschiedene Punkte  $x, y, z \in g$ , so wollen wir sagen können “ $x$  liegt zwischen  $y$  und  $z$ ”. Technisch wird das durch eine Relation gelöst.

**Definition 3.2.** *Sei  $(X, G)$  eine Inzidenzgeometrie. Eine Zwischenrelation auf  $(X, G)$  ist eine Teilmenge  $Z \subset X^3$  mit den Eigenschaften unten. Für  $(x, y, z) \in Z$  sagen wir:  $y$  liegt zwischen  $x$  und  $z$ .*

- (i) *Wenn  $y$  zwischen  $x$  und  $z$  liegt, dann sind  $x, y, z$  drei verschiedene kollineare Punkte, und  $y$  liegt auch zwischen  $z$  und  $x$ .*
- (ii) *Für je zwei verschiedene Punkte  $x, y$  gibt es einen Punkt  $z$ , so dass  $y$  zwischen  $x$  und  $z$  liegt.*
- (iii) *Gegeben je drei Punkte auf  $g$ , so liegt genau einer zwischen den beiden anderen.*

(iv) Es gilt das Axiom von Pasch: Sind  $x, y, z$  drei nicht-kollineare Punkte,  $g$  eine Gerade, die keinen der drei Punkte enthält. Wenn  $g$  einen Punkt zwischen  $x$  und  $y$  enthält, dann auch einen Punkt zwischen  $x$  und  $z$  oder einen Punkt zwischen  $y$  und  $z$ , aber nicht beides.

Wir schreiben  $[x, z]$  für Strecke von  $x$  nach  $z$ , d.h.

$$[x, z] = \{y \mid (x, y, z) \in Z\} \cup \{x, z\}.$$

Hier erlauben wir auch  $x = z$ .

Bei Euklid tauchen diese Axiome nicht explizit auf. Sie stammen aus 19. Jahrhundert.

**Beispiel.** Sei  $V$  ein reeller Vektorraum, aufgefasst als affiner Raum über sich selbst. Wir definieren eine Zwischenrelation durch

$$(x, y, z) \in Z \Leftrightarrow y = \lambda x + \mu z \text{ mit } 0 < \lambda, \mu < 1, \lambda + \mu = 1.$$

Die Strecke  $[x, z]$  ist gerade die konvexe Hülle von  $x$  und  $z$ . Zu überprüfen ist das Axiom von Pasch. Es ist offensichtlich verletzt, wenn  $\dim X > 2$ . Sei also nun  $X$  eine affine Ebene,  $P, Q, R$  ein Dreieck,  $S$  ein Schnittpunkt von  $[P, Q]$  mit einer Geraden  $g$ . Ohne Einschränkung ist  $X = \mathbb{R}^2$ ,  $S = (0, 0)$ ,  $Q = (1, 0)$ ,  $R = (0, 1)$ ,  $P = (0, -a)$  mit  $a > 0$ . Ist der Winkel von  $g$  mit der  $x$ -Achse kleiner als  $90^\circ$ , so schneidet  $g$  die Strecke  $[Q, R]$ . Ist er zwischen  $90^\circ$  und  $180^\circ$ , so schneidet  $g$  die Strecke  $[P, R]$ .

**Bemerkung.** Dasselbe funktioniert über jedem angeordneten Körper, z.B. auch für alle Teilkörper von  $\mathbb{R}$ .

Das Axiom von Pasch kodiert also die Dimension. Wir zeigen, wie einige Standardeigenschaften der Ebene aus dem Axiom folgen: Ein Punkt teilt eine Gerade in zwei Halbgeraden, eine Gerade teilt die Ebene in zwei Halbebenen. Zum Aufwärmen:

**Lemma 3.3.** Sei  $(X, G)$  Inzidenzgeometrie mit Dreieck und Zwischenrelation,  $[x, y]$  eine Strecke in  $X$  mit  $x \neq y$ . Dann enthält  $[x, y]$  unendlich viele Punkte.

*Beweis:* Wir genügt zu zeigen, dass  $[x, y]$  einen weiteren Punkt erhält. Rekursiv erhalten wir dann eine unendliche Folge.

Sei  $z'$  ein Punkt, so dass  $x, y, z$  nicht kollinear sind. Es existiert  $z$  auf der Geraden durch  $x$  und  $z'$ , so dass  $z'$  zwischen  $x$  und  $z$  liegt. Wir betrachten das Dreieck  $x, y, z$ . Es gibt einen weiteren Punkt  $y'$ , so dass  $y$  zwischen  $z$  und  $y'$  liegt. Sei  $g$  die Gerade durch  $z'$  und  $y'$ . Sie schneidet die Strecke  $[x, z]$  in  $z'$ , aber nicht die Strecke  $[y, z]$ , denn  $y'$  liegt nicht in  $[y, z]$ . Nach dem Axiom von Pasch schneidet  $g$  die dritte Seite des Dreiecks. Wir finden  $x'$  zwischen  $y$  und  $z$ .  $\square$

**Definition 3.4.** Sei  $(X, G, Z)$  eine Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation,  $g$  eine Gerade. Wir sagen zwei Punkte  $x$  und  $y$  liegen auf derselben Seite von  $g$ , wenn die Strecke  $[x, y]$  leeren Schnitt mit  $g$  hat.

**Satz 3.5.** Sei  $(X, G, Z)$  eine Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation,  $g \in G$  eine Gerade. Die Menge  $X \setminus g$  zerfällt in zwei disjunkte Teilmengen  $S_1$  und  $S_2$  (die Seiten), so dass je zwei Punkte von  $S_i$  auf derselben Seite liegen, und die Punkte aus  $S_1$  nicht auf derselben Seite wie die Punkte aus  $S_2$ .

Die Mengen  $g \cup S_i$  sind die Halbebenen mit Kante  $g$ .

*Beweis:* Ohne Einschränkung hat  $(X, G)$  ein Dreieck. Wir schreiben  $P \sim Q$ , wenn zwei Punkte  $P, Q$  auf derselben Seite von  $g$  liegen. Wir zeigen, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt. Die Relation ist reflexiv und symmetrisch. Zu zeigen ist Transitivität. Seien  $A, B, C \in X \setminus g$ . Wir setzen voraus, dass  $A$  und  $B$  auf derselben Seite von  $g$  liegen und  $B$  und  $C$  ebenfalls.

**1. Fall**  $A, B, C$  sind nicht kollinear. Nach Voraussetzung schneidet  $g$  weder  $[A, B]$  noch  $[B, C]$ . Nach dem Axiom von Pasch schneidet  $g$  auch  $[A, C]$  nicht.

**2. Fall** Seien  $A, B, C$  kollinear auf der Gerade  $h$ . Da  $A, B, C \notin g$  gilt, ist  $g \neq h$ . Die Geraden  $g$  und  $h$  haben höchstens einen Schnittpunkt, aber  $g$  enthält wenigstens zwei Punkte. Also gibt es einen Punkt  $D$  in  $g$ , der nicht in  $h$  liegt. Wir finden einen Punkt  $E$ , so dass  $A$  zwischen  $E$  und  $D$  liegt. Da die Gerade  $k$  durch  $A$  und  $D$  nicht  $g$  ist, liegt  $E$  nicht auf  $g$ . Die Strecke  $[EA]$  schneidet  $g$  nicht, denn der eindeutige Schnittpunkt der Geraden  $k$  mit  $g$  ist  $D$  und dieser Punkt liegt nicht zwischen  $E$  und  $A$ . Das bedeutet  $E \sim A$ . Die Punkte  $E, A, B$  sind nicht kollinear (sonst wäre  $h = k$ ,  $D \in h$ .) Nun wenden wir den 1. Fall an auf  $E \sim A$ ,  $A \sim B$ . Es folgt  $E \sim B$ . Wir wenden wieder den ersten Fall an auf  $E \sim B$  und  $B \sim C$  und erhalten  $E \sim C$ . Mit dem ersten Fall für  $A \sim E$ ,  $E \sim C$  folgt  $A \sim C$ .

Dies beendet den Beweis der Transitivität.

Nun zerfällt  $X \setminus g$  in Äquivalenzklassen. Wir müssen nur noch deren Anzahl bestimmen. Sei  $P \notin g$ ,  $Q \in g$ . Dann existiert ein  $R$ , so dass  $Q$  zwischen  $P$  und  $R$  liegt. Die Punkte  $P$  und  $R$  liegen nicht auf derselben Seite. Es gibt also mindestens zwei Äquivalenzklassen.

Seien  $A \approx C$ ,  $B \approx C$ . Wir zeigen  $A \sim B$ .

**1. Fall** Wenn die Punkte nicht kollinear sind, so bilden sie ein Dreieck, in dem zwei Seiten die Gerade  $g$  schneiden. Nach dem Axiom von Pasch folgt  $A \sim B$ .

**2. Fall** Die drei Punkte liegen auf einer Geraden  $h$ . Wie oben wählen wir  $D \in g$ , nicht auf  $h$  und  $E$ , so dass  $A$  zwischen  $E$  und  $D$  auf einer Geraden  $k$ . Alle drei Geraden sind verschieden. Wie oben ist  $A \sim E$ . Da  $A \approx C$  und  $\sim$  eine Äquivalenzrelation ist, folgt  $E \approx C$ . Wir wenden den 1. Fall an auf  $E, C, B$  und  $E \sim C$ ,  $B \approx C$  und erhalten  $E \sim B$ . Da  $\sim$  eine Äquivalenzrelation ist, folgt  $A \sim B$ .  $\square$

Durch Schneiden der Halbebenen mit Geraden werden auch die Geraden in Halbgeraden geteilt.

**Definition 3.6.** Sei  $(X, G, Z)$  eine Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation,  $g$  eine Gerade,  $A \in g$  ein Punkt. Wir sagen zwei Punkt  $x, y \in g \setminus \{A\}$  liegen auf derselben Seite von  $A$ , wenn  $A$  nicht zwischen  $x$  und  $y$  liegt.

**Satz 3.7.** Sei  $(X, G)$  eine Inzidenzgeometrie mit Dreieck und Zwischenrelation. Sei  $g$  eine Gerade,  $A \in g$  ein Punkt. Die Menge  $g \setminus \{A\}$  zerfällt in zwei disjunkte Teilmengen  $T_1$  und  $T_2$  (die Seiten), so dass je zwei Punkte von  $T_i$  auf derselben Seite liegen und die Punkte aus  $T_1$  nicht auf derselben Seite wie die Punkte aus  $T_2$ .

*Beweis:* Da  $X$  ein Dreieck hat, finden wir eine Hilfsgerade  $h$ , die  $g$  genau in  $A$  schneidet. Seien  $S_1$  und  $S_2$  die Seiten von  $X \setminus h$ . Wir erhalten  $T_i = S_i \cap g$ .  $\square$

**Definition 3.8.** Sei  $(X, G)$  Inzidenzgeometrie mit Dreieck und Zwischenrelation,  $g$  eine Gerade,  $A \in g$ . Wir nennen die Mengen  $\{A\} \cup T_i$  Halbgeraden und  $A$  die Ecke.

**Bemerkung.** Jede Halbgerade enthält unendlich viele Punkte, denn zur Ecke  $A$  und jedem Punkt  $P$  gibt es nach Definition einen weiteren Punkt  $Q$ , der nicht zwischen  $A$  und  $P$  liegt: statt dessen liegt  $P$  zwischen  $A$  und  $Q$ .

**Bemerkung.** Ist  $H$  eine Halbgerade mit Ecke  $x, y$  auf derselben Geraden, aber nicht in  $H$ , dann ist  $H \cup [y, x]$  eine Halbgerade mit Ecke  $y$ .

*Beweis:* Zu überprüfen ist, dass alle Punkte aus  $H \cup [y, x]$  auf der selben Seite von  $y$  liegen wie  $x$ . Sei  $a \in H$ . Nach Voraussetzung liegen  $y$  und  $a$  auf verschiedenen Seiten von  $x$ , also  $x$  zwischen  $y$  und  $a$ . Dann ist  $y$  nicht zwischen  $x$  und  $a$ , wie gewünscht. Sei  $b$  zwischen  $x$  und  $y$ . Dann liegen  $b$  und  $x$  auf derselben Seite von  $y$ .  $\square$

**Korollar 3.9.** Sei  $(X, G, Z)$  eine Inzidenzgeometrie mit Dreieck und Zwischenrelation,  $g$  eine Gerade. Die Relation  $H_1 \sim H_2$  wenn  $H_1 \subset H_2$  oder umgekehrt ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Halbgeraden in  $g$ . Es gibt genau zwei Äquivalenzklassen.

Diese Äquivalenzklassen heißen *Richtungen* von  $g$ . Äquivalente Halbgeraden haben dieselbe Richtung, nicht äquivalente Halbgeraden haben entgegengesetzte Richtungen.

*Beweis:* Wir wählen eine verträgliche Anordnung auf  $g$ . Sei  $A \in g$ . Wir zeigen, dass die beiden Halbgeraden mit Ecke  $g$  von der Form

$$H_1 = \{x \in g \mid x \leq A\} \quad \text{und} \quad H_2 = \{x \in g \mid x \geq A\}$$

sind. Wir wählen auf jeder Seite  $S_i$  von  $A$  einen Referenzpunkt  $x_i$ . Ohne Einschränkung  $P_1 < A < P_2$ . Liegt  $x \in S_1$ , so liegt  $x$  auf der anderen Seite von  $A$  als  $P_2$ . Es gilt also  $x < A < P_2$  und daher  $x \in H_1$ . Umgekehrt ist  $H_1 \setminus \{A\} \subset S_1$ . Damit ist die Aussage über die Halbgeraden gezeigt. Zwei Halbgeraden sind genau dann äquivalent, wenn sie beide mit  $\leq$  definiert werden oder beide mit  $\geq$ .

Aus dieser Beschreibung folgt, dass es sich um eine Äquivalenzrelation mit zwei Äquivalenzklassen handelt.  $\square$



*Alternativer Beweis ohne Anordnung.* Wir wählen eine Referenzhalbgerade  $H_0$  mit Ecke  $x_0$ . Wir sagen ein Punkt  $x \in g$  liegt rechts von  $x_0$ , wenn er in  $H_0$  liegt, links andernfalls. Für jedes  $x \in g$  gibt es genau eine Halbgerade  $H_x$  mit Ecke  $x$ , die in Relation zu  $H_0$  steht. Für Punkte rechts von  $x_0$  ist es die Halbgerade, die  $x$  nicht enthält (d.h. die Punkte von  $g$  auf der anderen Seite von  $x$  als  $x_0$ ). In diesem Fall gilt  $H_0 = [x_0, x] \cup H_x$ . Für Punkte links von  $g$  ist es die Halbgerade, die  $x_0$  enthält. In diesem Fall gilt  $H_x = [x, x_0] \cup H_0$ . Zu zeigen ist, dass je zwei dieser Halbgeraden  $H_x, H_y$  in Relation stehen.

**1. Fall:**  $x$  liegt links von  $x_0$  und  $y$  rechts. Dann gilt

$$H_x = [x, x_0] \cup H_0 \supset H_0 = [x_0, y] \cup H_y \supset H_y.$$

**2. Fall:**  $x$  und  $y$  liegen links von  $x_0$ . Ohne Einschränkung liegt  $y$  zwischen  $x$  und  $x_0$ . Es ist

$$H_x = [x, x_0] \cup H_0 \supset H_0.$$

Zu zeigen ist also  $[y, x_0] \subset H_x$ . Dies gilt für  $x_0$  nach Definition von  $H_x$ . Der Punkt  $y$  liegt zwischen  $x_0$  und  $x$ , also liegt  $x$  nicht zwischen  $y$  und  $x_0$ . Damit liegen  $y$  und  $x_0$  auf derselben Seite von  $x$ , also in  $H_x$ . Ebenso folgt es für alle Punkte zwischen  $y$  und  $x_0$ .

**3. Fall:**  $x$  und  $y$  liegen rechts von  $x_0$ . Ohne Einschränkung liegt wieder  $y$  zwischen  $x_0$  und  $x$ . Wir behaupten

$$H_y = [y, x] \cup H_x \supset H_0$$

Die rechte Seite ist eine Halbgerade mit Ecke  $y$ , die ganz in  $H_0$  enthalten ist, also gleich  $H_y$ .

Es folgt leicht, dass  $\sim$  eine Äquivalenzrelation mit zwei Äquivalenzklassen ist.  $\square$

**Korollar 3.10.** *Sei  $(X, G, Z)$  eine Inzidenzgeometrie mit Dreieck und Zwischenrelation,  $g$  eine Gerade. Dann existiert eine verträgliche Anordnung von  $g$ , d.h. eine Relation  $<$  auf  $g$ , so dass für verschiedene kollineare  $x, y, z \in g$  genau dann gilt  $y$  zwischen  $x$  und  $z$ , wenn  $x < y < z$  oder  $z < y < x$ .*

In dieser Beschreibung sind die beiden Halbgeraden von der Form  $\{y \in g \mid x \leq y\}$  und  $\{y \in g \mid x \geq y\}$ . Eine Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation heißt deshalb auch manchmal *angeordnete Inzidenzgeometrie*.

*Beweis:* Die Wahl einer Richtung definiert die Anordnung: wir setzen  $x < y$ , wenn  $y$  auf der Seite von  $x$  bezüglich der gewählten Richtung liegt,  $y \leq x$  andernfalls.  $\square$

Wieder definieren wir die zugehörigen Symmetrien.

**Definition 3.11.** *Seien  $(X, G, Z)$ ,  $(X', G', Z')$  Inzidenzgeometrien mit Zwischenrelation. Eine Abbildung von Inzidenzgeometrien mit Zwischenrelation ist eine Abbildung von Inzidenzgeometrien  $\Phi : X \rightarrow X'$ , so dass  $\Phi(y)$  zwischen  $\Phi(x)$  und  $\Phi(z)$  liegt, wenn  $y$  zwischen  $x$  und  $z$  liegt. Sie heißt Isomorphismus, wenn  $\Phi$  bijektiv ist.*

Abbildungen von Inzidenzgeometrien mit Zwischenrelation bilden insbesondere Strecken in Strecken, Halbebenen in Halbebenen und Halbgeraden in Halbgeraden ab.

**Lemma 3.12.** *Seien  $(X, G, Z)$ ,  $(X', G', Z')$  Inzidenzgeometrien mit Zwischenrelation und Dreieck,  $\Phi$  ein Isomorphismus. Dann ist auch  $\Phi^{-1}$  ein Isomorphismus.*

*Beweis:* Sei  $y'$  zwischen  $x'$  und  $z'$  in  $X'$ . Wir betrachten  $x = \Phi^{-1}(x')$ ,  $y = \Phi^{-1}(y')$ ,  $z = \Phi^{-1}(z')$ . Die drei Punkte sind kollinear, da  $\Phi^{-1}$  Geraden in Geraden abbildet. Angenommen,  $x$  liegt zwischen  $y$  und  $z$ . Dann liegt  $\phi(x) = x'$  zwischen  $\Phi(y) = y'$  und  $\Phi(z) = z'$ . Das ist falsch. Genauso schließen wir aus, dass  $y$  zwischen  $x$  und  $z$  liegt. Es bleibt nur die Möglichkeit, dass  $y$  zwischen  $x$  und  $z$  liegt.  $\square$

Weil es hier passt, wollen wir auch noch formulieren:

**Definition 3.13.** *Sei  $(X, G)$  eine Inzidenzgeometrie mit Dreieck und Zwischenrelation. Wir sagen  $(X, G)$  erfüllt das Supremumsaxiom, wenn es für jede Teilmenge  $A \subset [x, y] \subset g$  einer Strecke einen Punkt  $x_0 \in [x, y]$  gibt, so dass  $A \subset [x_0, y]$  und für alle Punkte  $P \in [x, y]$  auf der anderen Seite von  $x_0$  als  $x$  gilt  $A \not\subset [P, y]$ .*

In Termen der verträglichen Anordnung verlangen wir die Existenz des Supremums bzw. Infimums einer beschränkten Menge. Wir werden die Rolle dieses Axioms noch diskutieren, da doch recht wenig nach Euklid und sehr nach der Definition von  $\mathbb{R}$  klingt.

## 3.2 Kongruenzen

In der Euklidischen Geometrie geht es viel um Kongruenz. Hilbert formalisiert das als Wahl einer Äquivalenzrelation auf der Menge der Strecken und Winkel, die dann alle möglichen Regeln erfüllen muss. Wir verwenden einen anderen Zugang. Wir spezifizieren die Kongruenzabbildungen.

**Definition 3.14.** *Sei  $(X, G, Z)$  eine Inzidenzgeometrie mit Dreieck und Zwischenrelation. Ein Kongruenzgruppe ist eine Untergruppe  $K$  der Gruppe der Automorphismen von  $(X, G, Z)$ , so dass es für je zwei Halbgeraden genau zwei Elemente gibt, die die eine in die andere überführen. Die Elemente von  $K$  nennen wir Kongruenzen oder Kongruenzabbildungen. Das Tupel  $(X, G, Z, K)$  ist eine Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation und Kongruenzen.*

In anderen Worten: Die Gruppe operiert zweifach transitiv.

**Bemerkung.** Die Gruppe  $K$  operiert auch transitiv auf der Menge der Geraden. Mehr noch: gegeben Geraden  $g, g'$  und Punkte  $x \in g$ ,  $x' \in g'$ , so gibt es eine Kongruenz, die  $g$  nach  $g'$  und  $x$  nach  $x'$  abbildet.

Eine Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation und Kongruenzen enthält also immer in Dreieck. Die seltsame Bedingung wird sofort klar, wenn wir unser Standardbeispiel betrachten.

**Definition 3.15.** Sei  $V$  ein 2-dimensionaler euklidischer Vektorraum (also über  $\mathbb{R}$ , mit einem Skalarprodukt),  $A$  ein affiner Raum zum Vektorraum  $V$ . Eine affine Bewegung  $A \rightarrow A$  heißt Kongruenzabbildung, wenn die zugrundeliegende lineare Abbildung orthogonal ist, d.h. verträglich ist mit dem Skalarprodukt.

**Beispiel.** Verschiebungen und Abbildungen der Form  $\phi_{f,x_0}$  für eine orthogonale Abbildung  $f : V \rightarrow V$  sind Kongruenzabbildungen. Nach unserem Struktursatz für affine Abbildungen ist jede Kongruenzabbildung Komposition von zwei solchen Abbildungen.

**Lemma 3.16.** Die so definierte Gruppe von Kongruenzen erfüllt die Eigenschaft aus der Definition.

*Beweis:* Ohne Einschränkung ist  $A = V = \mathbb{R}^2$ . Wir betrachten eine Halbgerade. Mit einer Verschiebung bilden wir den Randpunkt auf  $(0, 0)$  ab. Mit einer Drehung bilden wir die Halbgerade auf die Halbgerade  $H = \{(x, 0) | x \geq 0\}$  ab. Es liegen also alle Halbgeraden in einer Bahn der Operation. Wir müssen noch die Standgruppe von  $H$  berechnen. Sei also  $\phi = \tau_v \circ \phi_{0,f}$  eine Kongruenzabbildung, die  $H$  nach  $H$  abbildet. Das Bild von  $0$  ist  $0$ , also  $v = 0$ . Wir haben es mit einer linearen Abbildung zu tun. Sei  $M$  die darstellende Matrix von  $f$ . Sie ist orthogonal. Orthogonale Matrizen haben die Form

$$D_\alpha S^\varepsilon,$$

wobei  $D_\alpha$  die Drehung um den Winkel  $\alpha$  ist,  $S$  die Vertauschungsmatrix  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  und  $\varepsilon = 0, 1$ . Im Fall  $\varepsilon = 0$  ist  $f$  eine Drehung. Da sie die positive  $x$ -Achse festhält, ist es die Drehung um  $0$  Grad. Die Abbildung  $S$  bildet die positive  $x$ -Achse auf die positive  $y$ -Achse ab. Dann ist  $D_\alpha$  die Drehung um  $270^\circ$ . Dies sind genau zwei Möglichkeiten.  $\square$

**Bemerkung.** Bei der nicht-trivialen Bewegung, die die Halbgerade festhält, handelt es sich einfach um die Spiegelung an der Geraden. In dem Beispiel kann jede Kongruenzbewegung als Produkt von Spiegelungen geschrieben werden. Diese Einsicht steckt hinter den Konsequenzen aus den Axiomen, die wir im nächsten Kapitel angehen werden.

**Definition 3.17.** Die Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation und Kongruenzen auf  $X = \mathbb{R}^2$  mit der durch die Ordnung von  $\mathbb{R}$  induzierten Zwischenrelation und der Gruppe der Kongruenzabbildungen heißt kartesische Ebene.

Die Idee, die Ebene mit Koordinaten zu versehen geht auf auf Descartes, latinisiert Cartesius, zurück, daher diese Terminologie, die in einigen Quellen verwendet wird.

Wieder wollen wir Abbildungen zwischen Inzidenzgeometrien betrachten.

**Definition 3.18.** Seien  $(X_1, G_1, Z_1, K_1)$  und  $(X_2, G_2, Z_2, K_2)$  Inzidenzgeometrien mit Zwischenrelation und Kongruenzen. Eine Abbildung von Inzidenzgeometrien mit Zwischenrelation und Kongruenzen ist ein Paar  $(\Phi, F)$  bestehend aus einer Abbildung  $\Phi : X_1 \rightarrow X_2$  von Inzidenzgeometrien mit Zwischenrelation und einem Gruppenhomomorphismus  $F : K_1 \rightarrow K_2$  verträglich mit der Operation von  $K_i$  auf  $X_i$ . Er heißt Isomorphismus, wenn  $\Phi$  bijektiv ist.

**Lemma 3.19.** Wenn  $(\Phi, F)$  ein Isomorphismus ist, dann ist  $F$  durch  $\Phi$  eindeutig festgelegt und ein Isomorphismus von Gruppen.

*Beweis:* Sei  $\sigma \in K_1$ . Wir betrachten  $F(\sigma) \in K_2$ . Als Kongruenzabbildung ist  $F(\sigma)$  eine Abbildung  $X_2 \rightarrow X_2$ . Sei also  $x_2 \in X_2$ . Da  $\Phi$  bijektiv ist, gibt es  $x_1 \in X_1$  mit  $\Phi(x_1) = x_2$ . Wegen der Verträglichkeit mit der Operation bedeutet das

$$F(\sigma)(x_2) = F(\sigma)(\Phi(x_1)) = \Phi(\sigma x_1) = \Phi \circ \sigma \circ \Phi^{-1}(x_2),$$

also ist  $F$  bereits durch  $\Phi$  eindeutig bestimmt. Aus der Formel liest man auch ab, dass  $F$  injektiv ist. Die Untergruppe  $F(K_1) \subset K_2$  operiert ebenfalls zweifach transitiv auf Halbgeraden. Das ist nur möglich, wenn die beiden Gruppen gleich sind.  $\square$

**Beispiel.** Sei  $\Phi : (A, V) \rightarrow (A', V')$  affiner Isomorphismus von affinen Ebenen über  $\mathbb{R}$ . Durch die Wahl von Skalarprodukten werden beide zu Inzidenzgeometrien mit Zwischenrelation und Kongruenzen. Ist  $\Phi_V$  orthogonal, d.h. verträglich mit dem Skalarprodukt, so induziert  $\Phi$  sogar einen Isomorphismus von Inzidenzgeometrien mit Zwischenrelation und Kongruenzen. Die Umkehrung gilt nur fast: auch Streckungen sind möglich.

### 3.3 Das Parallelenaxiom

Jetzt fehlt nur noch ein Axiom.

**Definition 3.20.** Sei  $(X, G)$  eine Inzidenzgeometrie. Zwei Geraden heißen parallel, wenn sie sich nicht schneiden.

**Definition 3.21.** Sei  $(X, G)$  eine Inzidenzgeometrie. Sie erfüllt das Parallelenaxiom, wenn es zu jeder Gerade  $g$  und zu jedem Punkt  $x \notin g$  genau eine Parallele zu  $g$  durch  $x$  gibt.

**Definition 3.22.** Eine Inzidenzgeometrie  $(X, G, Z, K)$  mit Zwischenrelation und Kongruenz heißt fast-euklidische Ebene, wenn sie das Supremumsaxiom erfüllt. Sie heißt euklidisch, wenn zusätzlich das Parallelenaxiom gilt.

**Beispiel.** Die kartesische Ebene ist euklidisch.

**Theorem 3.23.** Die hyperbolische Ebene mit der Zwischenrelation, die von der Parametrisierung von Halbkreisen durch das Intervall  $(0, \pi)$  induziert wird, und mit der Wahl der Gruppe der hyperbolischen Bewegungen als Kongruenzen ist eine fast-euklidische Ebene.

Den Beweis führen wir später, zunächst konzentrieren wir uns auf die Konsequenzen aus den Axiomen.



## Kapitel 4

# Charakterisierung der euklidischen Ebene

Wir wollen beweisen:

**Theorem 4.1.** *Jede euklidische Ebene ist als Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation mit Kongruenzen isomorph zur kartesischen Ebene.*

Der Beweis folgt dem Skript von Wolfgang Soergel. Gesucht ist eine affine Struktur, also ein Vektorraum von Richtungsvektoren, der einfach transitiv operiert. Wir werden ihn finden als Untergruppe der Verschiebungen in der Gruppe der Kongruenzen. Wir werden daher definieren, wann eine Kongruenzabbildung eine Verschiebung entlang einer Geraden  $g$  ist. Für festes  $g$  erhalten wir eine Gruppe  $\vec{g}$ , die isomorph zu  $\mathbb{R}$  ist. Unter Annahme des Parallelenaxiom bildet die Menge aller Verschiebungen ebenfalls eine kommutative Gruppe, die dann isomorph zu  $\mathbb{R}^2$  ist. Unser wesentliches Werkzeug werden Spiegelungen sein, ein anderer Typ von speziellen Kongruenzabbildungen.

### 4.1 Axiomatische Charakterisierung von Spiegelungen

**Lemma 4.2.** *Sei  $(X, G, Z, K)$  eine Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation und Kongruenzen. Jede Kongruenzbewegung, die eine Halbgerade bijektiv auf sich selbst abbildet, hält die zugrundeliegende Gerade punktweise fest.*

*Beweis:* Wir betrachten eine Halbgerade  $H$  mit Ecke  $P$ ,  $g$  die zugrundeliegende Gerade. Sei  $\phi$  die nicht-triviale Kongruenzabbildung, die  $H$  in sich selbst abbildet. Sie bildet  $g$  in sich ab, da  $\phi(g)$  zwei Punkte der Halbgeraden  $H$  enthält. Da sie die Zwischenrelation erhält, bildet  $\phi$  auch die andere Seite der Geraden durch  $H$  in sich selbst ab. Die beiden Halbgeraden mit Ecke  $P$  werden auf Halbgeraden mit Ecke  $\phi(P)$  abgebildet. Da sie jede für sich respektiert werden, muss  $\phi(P) = P$  sein.

Die Kongruenz  $\phi$  hat Ordnung 2, da die Standgruppe von  $H$  genau zwei Elemente hat. Es gilt also  $\phi^2 = \text{id}$ . Sei  $Q \in H$  beliebig. Wir betrachten  $P, Q, \phi(Q)$ . Wir wollen  $Q = \phi(Q)$  zeigen. Angenommen, die Punkte sind verschieden. Da  $Q$  und  $\phi(Q)$  in derselben Halbgeraden liegen, liegt  $P$  nicht zwischen  $Q$  und  $\phi(Q)$ . Wir betrachten den Fall, dass  $Q$  zwischen  $P$  und  $\phi(Q)$  liegt. (Der zweite Fall geht genauso). Dann liegt  $\phi(Q)$  zwischen  $\phi(P) = P$  und  $\phi(\phi(Q)) = Q$ . Dies ist ein Widerspruch.

Dieselben Argumente gelten auch für die zweite Halbgerade auf  $g$ , also wird ganz  $g$  punktweise festgehalten.  $\square$

**Definition 4.3.** Sei  $(X, G, Z, K)$  eine Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation und Kongruenzen,  $g \in G$  eine Gerade. Dann heißt das eindeutige nicht-triviale Element  $s_g \in K$ , das  $g$  punktweise festhält, Spiegelung an  $g$ .

Spiegelungen haben insbesondere Ordnung 2:  $s_g \neq \text{id}$ ,  $s_g^2 = \text{id}$ .

**Lemma 4.4.** Sei  $g$  Gerade,  $k \in K$  eine Kongruenz. Dann gilt

$$ks_gk^{-1} = s_{k(g)}.$$

*Beweis:* Wir überprüfen, dass die linke Seite alle Punkte von  $k(g)$  festhält. Für  $x \in g$  gilt tatsächlich

$$ks_gk^{-1}(k(x)) = ks_g(x) = k(x).$$

Außerdem ist  $kg_s_gk^{-1} \neq \text{id}$  (sonst folgt durch Multiplikation mit  $k^{-1}$  von links und  $k$  von rechts auch  $s_g = \text{id}$ ), also die eindeutige Spiegelung an der Geraden  $k(g)$ .  $\square$

**Lemma 4.5.** Die Spiegelung  $s_g$  an der Geraden  $g$  vertauscht die beiden Seiten von  $g$ .

*Beweis:* Wir erinnern: Zwei Punkte  $x, y$  liegen in derselben Halbebene genau dann, wenn die Gerade  $g$  leeren Schnitt mit  $[x, y]$  hat. Das Bild einer Halbebene ist daher eine Halbebene. Da  $s_g$  die Gerade  $g$  festhält, gibt es nur zwei Möglichkeiten für das Bild der Halbebene. Angenommen, die Halbebenen werden nicht vertauscht.

Sei  $x \in X \setminus g$  mit  $y := s_g(x) \neq x$ . Ein solches Element gibt es, da  $s_g \neq \text{id}$ . Sei  $H$  die Halbebene von  $x$ . Da  $s_g$  die Halbebenen nicht vertauscht, liegt auch  $s_g(x)$  in  $H$ . Sei  $h$  die Gerade durch  $x$  und  $y$ . Wir zeigen, dass  $g$  und  $h$  sich nicht schneiden. Sei also  $z$  ein Schnittpunkt. Er liegt nicht zwischen  $x$  und  $y$ , da beide Punkte auf derselben Seite von  $g$  liegen. Daher liegt  $x$  zwischen  $z$  und  $y$  (oder umgekehrt). Da  $s_g$  die Zwischenrelation erhält, liegt dann  $s_g(x) = y$  zwischen  $s_g(z) = z$  und  $s_g(y) = x$  (oder umgekehrt). Da nur eines von beidem gelten kann, haben wir einen Widerspruch. Die Geraden  $g$  und  $h$  sind also disjunkt.

Damit zerfällt  $H \setminus h$  in zwei disjunkte Teile, nämlich den Schnitt mit den beiden Seiten von  $h$ . Die gesamte Ebene  $X \setminus (g \cup h)$  zerfällt in drei disjunkte Teile: zwei Halbebenen und der Streifen zwischen  $g$  und  $h$ . Wir schreiben  $H_g \cup S \cup H_h$ , wobei  $H_h \cup S = H \setminus h$ ,  $H_g$  die andere Seite von  $g$ .



#### 4.1. AXIOMATISCHE CHARAKTERISIERUNG VON SPIEGELUNGEN 37

Sei  $p \in g$ . Die Gerade  $k$  durch  $p$  und  $y$  teilt  $g$  in zwei Halbgeraden. Sei  $q \in g$  ein Punkt auf der anderen Seite von  $k$  als  $x$ . Alle Punkte im Inneren Strecke  $[x, q]$  liegen auf derselben Seite von  $g$  wie  $x$  und auf derselben Seite von  $h$  wie  $q$ , also im Streifen  $S$ . Die Punkt  $x$  und  $q$  liegen nach Konstruktion auf verschiedenen Seiten von  $k$ , also schneidet die Strecke die Gerade in einem Schnittpunkt  $z$ , der dann in  $S$  liegt. Der Schnitt von  $k$  mit  $S$  ist das Innere von  $[y, p]$ , also liegt  $z \in [y, p]$ .

Wir wenden die Spiegelung  $s_g$  auf die Konstellation an. Der Bildpunkt  $s_g(z)$  liegt im Schnitt der Strecken  $[s_g(x), s_g(q)] = [y, q]$  und  $[s_g(y), s_g(p)] = [x, p]$ . Das Innere von  $[x, p]$  liegt auf derselben Seite von  $k$  wie  $x$ , das Innere von  $[y, q]$  auf derselben Seite von  $k$  wie  $q$ . Sie sind verschieden, also können sich die Strecken nicht schneiden. Dies ist der gesuchte Widerspruch.  $\square$

**Bemerkung.** Beweise wie dieser sind nur verständlich, wenn man sich Bilder malt und die Eigenschaften verfolgt. Gleichzeitig sind diese Skizzen sehr gefährlich: dass sich zwei Strecken offensichtlich schneiden, ist kein Beweis!

**Definition 4.6.** Seien  $g, h$  Geraden in einer Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation und Kongruenzen. Die Gerade  $g$  steht senkrecht auf  $h$  genau dann, wenn  $g \neq h$  und  $s_g(h) = h$ . Wir schreiben  $g \perp h$ .

**Satz 4.7.** Sei  $(X, G, Z, K)$  Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation und Kongruenzen.

- (i) Sei  $k$  eine Kongruenz,  $h$  und  $g$  Geraden mit  $h \perp g$ . Dann gilt  $k(h) \perp k(g)$ .
- (ii) Gegeben Geraden  $g \neq h$  gilt  $h \perp g$  genau dann, wenn die zugehörigen Spiegelungen kommutieren, in Formeln:  $s_h s_g = s_g s_h$  ;
- (iii) Zu jeder Gerade  $g$  und jedem Punkt  $x$  gibt es genau eine Gerade  $h$  durch  $x$  mit  $h \perp g$ , das Lot durch  $x$  auf  $g$ ;
- (iv) Gegeben Geraden  $g, h$  gilt  $(h \perp g) \Leftrightarrow (g \perp h)$ ;
- (v) Stehen Geraden  $h_1$  und  $h_2$  senkrecht auf einer Geraden  $g$  in verschiedenen Punkten  $x_1 \neq x_2$ , so gilt  $h_1 \cap h_2 = \emptyset$ .

*Beweis:* Zu (i) Wir verwenden  $k s_g k^{-1} = s_{k(g)}$ . Zu zeigen ist  $s_{k(g)}(k(h)) \subset k(h)$ . Sei  $x \in h$ . Dann folgt

$$s_{k(g)}(k(x)) = k s_g k^{-1}(k(x)) = k s_g(x) \in k(h).$$

Zu (ii): Sei  $h \perp g$ . Wir wenden Lemma 4.4 an auf  $k = s_g$  und die Spiegelung  $s_h$ . Wegen  $s_g(h) = h$  erhalten

$$s_g s_h s_g = s_h \Rightarrow s_h s_g = s_g^2 s_h s_g = s_g s_h.$$

Umgekehrt setzen wir voraus, dass die Kongruenzen kommutieren. Sei  $x \in h$ . Dann ist

$$s_g(x) = s_g(s_h(x)) = s_h(s_g(x)),$$

d.h.  $s_g(x)$  ist ein Fixpunkt von  $s_h$ . Die Fixpunkte von  $s_h$  sind genau die Elemente von  $h$ , also gilt  $s_h(x) \in h$ . Damit ist  $h \perp g$ .

Zu (iii): Für  $x \notin g$  ist die Gerade durch  $x$  und  $s_g(x)$  senkrecht zu  $g$ . Es ist auch die einzige Gerade mit dieser Eigenschaft.

Sei nun  $x \in g$ . Wir wählen  $y \notin g$ . Sei  $h$  das Lot auf  $g$  durch  $y$ . Sei  $x'$  der Fußpunkt des Lotes. Sei  $k$  eine Kongruenz mit  $k(g) = g$  und  $k(x') = x$ . Dann ist  $k(h)$  senkrecht zu  $g$  und schneidet  $g$  in  $x$ . Angenommen, es gibt verschiedene Lote  $h_1$  und  $h_2$  auf  $g$  mit Fußpunkt  $x$ . Alle drei Punkte schneiden sich in  $x$ . Sei  $z \in h_1$  ungleich  $x$ . Dann liegt  $z$  nicht in  $h_2$ , ist also kein Fixpunkt von  $s_{h_2}$ . Das zeigt, dass  $s_{h_1} \neq s_{h_2}$ . Es gibt genau zwei Kongruenzen, die die beiden Halbgeraden in  $g$  mit Ecke  $x$  vertauschen, nämlich  $s_{h_1}$  und  $s_g s_{h_1} = s_{h_1} s_g$ . Auch  $s_{h_2}$  hat diese Eigenschaft, also folgt  $s_g s_{h_1} = s_{h_2}$ . Die Abbildung  $s_{h_2}$  respektiert die Halbebenen mit Kante  $g$ , aber  $s_g s_{h_1}$  nicht. Dies ist ein Widerspruch.

Zu (iv): Die Bedingung in (ii) ist symmetrisch in  $g$  und  $h$ .

Zu (v): Angenommen,  $x$  ist ein Schnittpunkt von  $h_1$  und  $h_2$ . Er liegt nicht auf  $g$ , denn der eindeutige Schnittpunkt von  $h_i$  mit  $g$  ist  $x_i$ . Es gilt also  $s_g(x) \neq x$ . Weiter ist  $s_g(x)$  ein Schnittpunkt von  $s_g(h_1) = h_1$  und  $s_g(h_2) = h_2$ . Die beiden Geraden haben zwei Schnittpunkte, sind also gleich. Das ist wieder ein Widerspruch zu  $x_1 \neq x_2$ .  $\square$

**Korollar 4.8.** Sei  $(X, G, Z, G)$  eine Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation und Kongruenzen. Dann existiert zu jeder Geraden  $g$  und zu jedem Punkt  $x \notin g$  eine Parallele zu  $g$  durch  $x$ .

*Beweis:* Sei  $h$  das Lot auf  $g$  durch  $x$  und  $g'$  das Lot auf  $h$  zu  $x$ . Dann sind  $g$  und  $g'$  senkrecht zu  $h$  mit verschiedenen Fußpunkten, also disjunkt.  $\square$

Diese Eigenschaft ist auch als *schwaches Parallelenaxiom* bekannt. Es ist verführerisch, Eindeutigkeit zu erwarten. Wie bereits in der Einleitung erwähnt, folgt es aber keineswegs! Wir arbeiten erstmal solange wie möglich ohne das Parallelenaxiom weiter. Übrigens folgt damit:

**Korollar 4.9.** Es ist nicht möglich, die projektive Ebene über einem Körper  $k$  zu einer Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation und Kongruenz zu machen.

*Beweis:* In der projektiven Ebene gibt es keine Parallelen.  $\square$

## 4.2 Axiomatische Charakterisierung von Verschiebungen

Nach Voraussetzung operiert  $K$  vierfach transitiv auf den Paaren  $(g, x)$ , wobei  $g$  eine Gerade ist und  $x \in g$  ein Punkt. Wir kennen die Standgruppe inzwischen explizit: Es ist  $\{\text{id}, s_g, s_h, s_g s_h\}$  wobei  $h$  das Lot auf  $g$  in  $x$  ist.

**Definition 4.10.** Sei  $(X, G, Z, K)$  Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation und Kongruenzen,  $g$  eine Gerade.

- (i) Eine Kongruenz heißt halbebenenerhaltend (bezüglich der Geraden  $g$ ), wenn sie  $g$  und beide Seiten von  $g$  stabilisiert. Sei  $K|_g$  die Untergruppe der halbebenenerhaltenden Kongruenzen bezüglich  $g$ .
- (ii) Eine Kongruenz heißt richtungserhaltend, wenn sie alle Halbgeraden in  $g$  derselben Richtung in Halbgeraden dieser Richtung abbildet.
- (iii) Sie heißt Verschiebung entlang  $g$ , wenn sie halbenenerhaltend ist und richtungserhaltend ist.
- (iv) Wir schreiben  $\vec{g}$  für die Untergruppe der Verschiebungen entlang  $g$  und  $\vec{X}$  für die Menge  $\bigcup_{g \in G} \vec{g}$ .

Es wird sich herausstellen, dass auch  $\vec{X}$  eine Gruppe ist.

**Lemma 4.11.**  $\vec{g}$  operiert einfach transitiv auf  $g$ .

*Beweis:* Wie bemerkt hat die Standgruppe eines Paares  $(g, x)$  die vier Elemente  $\text{id}, s_g, s_h, s_g s_h$ , wobei  $h$  das Lot auf  $g$  in  $x$  ist. Nur eines davon ist eine Verschiebung, nämlich  $\text{id}$ . Ganz  $K$  operiert transitiv. Sei also  $\phi \in K$  mit  $\phi(g) = g$ ,  $\phi(x) = x'$ . Wenn  $\phi$  die Halbebenen vertauscht, so ersetzen wir  $\phi$  durch  $s_g \phi$ . Vertauscht es die Richtungen, so multiplizieren wir mit  $s_h$ . Insgesamt erhalten wir eine Verschiebung, die  $(g, x)$  auf  $(g, x')$  abbildet.  $\square$

**Definition 4.12.** Wir schreiben  $\vec{xy}$  für die eindeutige Verschiebung entlang der Geraden durch  $x$  und  $y$ , die  $x$  auf  $y$  abbildet. (Für  $x = y$  setzen wir  $\vec{xy} = \text{id}$ ).

**Beispiel.** In der kartesischen Ebene ist jede Verschiebung um einen Richtungsvektor von  $g$  halbebenenerhaltend, aber auch jede Spiegelung an einer Geraden, die senkrecht zu  $g$  steht. Wir identifizieren die Richtungsvektoren  $\vec{xy}$  im Sinne der affinen Geometrie mit den Verschiebungen im obigen Sinn. Wir erhalten  $\vec{g} = \{\tau_{\lambda v} | \lambda \in \mathbb{R}\}$  wenn  $v$  ein Richtungsvektor von  $g$  ist, insbesondere einen Gruppenisomorphismus  $\vec{g} \cong \langle v \rangle \cong (\mathbb{R}, +)$ .

**Bemerkung.** Unser Ziel ist, dieses Beispiel umzukehren und aus der Gruppe  $\vec{g}$  einen eindimensionalen Vektorraum zu machen. Unter Zusatzvoraussetzungen wird das möglich sein.

**Lemma 4.13.** Sei  $g$  Gerade in einer fast-euklidischen Ebene,  $\leq$  eine verträgliche Anordnung auf  $g$ ,  $\tau$  eine nicht-triviale Verschiebung entlang  $g$ .

- (i) Für jedes  $x \in g$  ist die Menge  $\{\tau^n(x) | n \in \mathbb{N}\}$  für jedes  $x \in g$  unbeschränkt.
- (ii) Es gilt entweder  $x < \tau(x)$  für alle  $x \in g$  oder  $x > \tau(x)$  für alle  $x \in g$ . In anderen Worten: alle Halbgeraden mit Ecke  $x$  durch  $\tau(x)$  haben dieselbe Richtung.

*Beweis:* Angenommen, die Folge der  $\tau^n(x)$  ist beschränkt, also hat sie ein Supremum  $z$ . Wir behaupten, dass  $\tau(z) = z$ . Es gilt  $z \geq \tau^n(x)$  für alle  $n$ , also auch  $\tau(z) \geq \tau^{n+1}(x)$  und daher  $\tau(z) \geq \sup_n \tau^{n+1}(x) = z$ . Angenommen,  $\tau(z) > z$ .

Dann folgt  $z > \tau^{-1}(z) \geq \tau^{n-1}(x)$  und daher  $\tau^{-1}(z) \geq \sup_n \tau^{n-1}(x) = z$ . Dies ist ein Widerspruch.

Der Punkt  $z$  ist ein Fixpunkt von  $\tau$ . Eine Verschiebung mit einem Fixpunkt ist die Identität,  $\tau$  sollte aber nicht-trivial sein. Damit ist die erste Aussage gezeigt.

Richtungserhaltende Abbildungen sind automatisch ordnungserhaltend. Aus  $x < y$  folgt  $\tau(x) < \tau(y)$ . Angenommen, es gibt  $x, y \in g$  so dass  $x < \tau(x)$ ,  $y > \tau(y)$ . Ohne Einschränkung ist  $x < y$  (andernfalls ersetze  $\tau$  durch  $\tau^{-1}$ ). Es gilt

$$x < \tau(x) < \tau(y) < y.$$

Durch wiederholtes Anwenden von  $\tau$  erhalten wir

$$x < \tau(x) < \tau^2(x) < \tau^3(x) < \dots < \tau^3(y) < \tau^2(y) < \tau(y) < y.$$

Insbesondere ist die Folge  $\tau^n(x)$  beschränkt, das ist ein Widerspruch.  $\square$

**Bemerkung.** Die erste Aussage ist eine Inkarnation des *archimedischen Axioms* für die Gruppe  $\vec{g}$ .

**Definition 4.14.** Wir nennen zwei Elemente von  $\vec{g}$  gleichgerichtet, wenn für beide in (ii) derselbe Fall zutrifft.

**Lemma 4.15.** Sei  $(X, G, Z, K)$  fast-euklidisch,  $\phi$  halbebenenerhaltend, aber keine Verschiebung. Dann ist  $\phi^2 = \text{id}$ .

**Beispiel.** In der kartesischen Ebene betrachten wir die Gerade  $y = 0$  und die Abbildung  $(x, y) \mapsto (-x - v, y)$ . Dann ist  $\phi^2(x, y) = (-(-x - v) - v, y) = (x, y)$ .

*Beweis:* Die Abbildung  $\phi^2$  erhält die Seiten von  $g$  und die Richtung, ist also eine Verschiebung. Angenommen,  $\phi^2 \neq \text{id}$ . Dann gibt es  $x \in g$  mit  $\phi(x) \neq x$ . Wir wählen die verträgliche Anordnung von  $g$  mit der  $x < \phi(x)$ . Die Abbildung  $\phi$  erhält die Halbebenen, aber nicht die Richtung von  $g$ . Sie verkehrt also die Anordnung und es folgt  $\phi(x) > \phi^2(x)$ . Wir haben also entweder

$$x < \phi^2(x) < \phi(x)$$

oder

$$\phi^2(x) < x < \phi(x).$$

Im ersten Fall wenden wir die richtungserhaltende Abbildung  $\phi^{-2}$  an und betrachten  $\phi^{-1}$  statt  $\phi$ . Ohne Einschränkung sind wir also im zweiten Fall. Eine weitere Anwendung von  $\phi$  ergibt  $\phi^3(x) > \phi(x)$  und insgesamt die Kette

$$\phi^2(x) < x < \phi(x) < \phi^3(x).$$

Die Verschiebung  $\tau = \phi^{-2}$  ist vergrößernd, da sie  $\phi^2(x)$  auf  $x$  abbildet. Also gilt auch  $\phi(x) < \tau\phi(x)$ . Da  $\tau$  die Richtung erhält, gilt auch  $\tau\phi(x) < \tau\phi^3(x)$ . Insgesamt:

$$\phi(x) < \tau\phi(x) < \tau\phi^3(x) = \phi(x).$$

Das ist ein Widerspruch.  $\square$

**Lemma 4.16.** *Sei  $(X, G, Z, K)$  eine fast-euklidische Geometrie. Gegeben zwei verschiedene Punkte  $x \neq y$  gibt es stets genau eine Spiegelung  $s \in K$ , die  $x$  und  $y$  vertauscht, und diese stabilisiert beide Halbebenen zur Geraden durch  $x$  und  $y$ .*

*Beweis:* Sei  $g$  die Gerade durch  $x$  und  $y$ . Es gibt genau eine halbebenenenerhaltende Kongruenzabbildung  $s$  zu  $g$ , die keine Verschiebung ist und  $x$  auf  $y$  abbildet. Wir zeigen, dass  $s$  die Spiegelung an einer anderen Geraden  $h$  ist. Da  $s$  die Gerade  $g$  respektiert, muss dieses  $h$  senkrecht auf  $g$  stehen. Wir wissen aus dem letzten Lemma, dass dann  $s^2 = \text{id}$ , und es gilt  $s(y) = x$ .

Wir konstruieren zuerst einen Punkt  $w$ , der ein Fixpunkt von  $s$  ist. Sei  $z$  ein beliebiger Punkt außerhalb von  $g$ . Wenn  $z$  ein Fixpunkt ist, sind wir fertig mit diesem Schritt. Anderfalls betrachten wir das Dreieck mit den Ecken  $x, y, z$  und das Bilddreieck mit den Ecken  $s(x) = y, s(y) = x, s(z)$ . Seien  $g_{xz}$  die Gerade durch  $x$  und  $z$  etc.

Anwenden von  $s$  auf  $g_{xz}$  ergibt  $g_{ys(z)}$ . Ein Schnittpunkt dieser beiden Geraden ist ein Fixpunkt von  $s$  und wir sind fertig. Existiert der Schnittpunkt nicht, so liegen  $s(z)$  und  $y$  auf derselben Seite von  $g_{xz}$ .

Anwenden von  $s$  auf  $g_{yz}$  ergibt  $g_{xs(z)}$ . Ein Schnittpunkt dieser beiden Geraden ist ein Fixpunkt von  $s$  und wir sind fertig. Existiert der Schnittpunkt nicht, so liegen  $s(z)$  und  $x$  auf derselben Seite von  $g_{yz}$ .

Sei  $D$  die Fläche des Dreiecks  $x, y, z$ , definiert als Schnitt von drei Halbebenen. Der Punkt  $s(z)$  liegt auf derselben Seite von  $g$  wie  $z$ , da  $s$  diese Halbebenen respektiert. Insgesamt gilt jetzt  $s(z) \in D$ . Dann folgt aber  $s(D) \subset D$ . Das ist nur möglich, wenn  $s(D) = D$  und  $s(z) = z$ . Wieder haben wir einen Fixpunkt gefunden.

Sei  $h$  das Lot auf  $g$  durch den Fixpunkt  $w$ . Dann ist  $s(h)$  ein Lot auf  $s(g) = g$  durch  $s(w) = w$ . Wegen der Eindeutigkeit des Lotes gilt  $s(h) = h$ . Weiter bildet  $s$  die Halbgerade von  $h$  durch  $w$  mit Ecke der Fußpunkt des Lotes in sich selbst ab. Es ist also  $s = s_h$ .  $\square$

**Satz 4.17.** *Sei  $(X, G, Z, K)$  eine fast-euklidische Geometrie,  $g$  eine Gerade.*

(i) *Alle Nichtverschiebungen aus  $K|_g$  sind Spiegelungen an Geraden die senkrecht zu  $g$  stehen und diese Spiegelungen erzeugen  $K|_g$ .*

(ii) *Jede Verschiebung aus  $\vec{g}$  ist das Quadrat einer weiteren Verschiebung aus  $\vec{g}$ .*

(iii) *Ist  $\tau$  eine Verschiebung entlang  $g$ ,  $\phi$  eine Nichtverschiebung in  $K|_g$ . Dann ist*

$$\phi\tau\phi = \phi^{-1}\tau\phi = \tau^{-1}.$$

(iv) *Die Gruppe  $\vec{g}$  der Verschiebungen längs einer Gerade ist stets kommutativ.*

*Beweis:* Zu (i): Sei  $\phi \in K|_g$  eine Nichtverschiebung,  $x \in g$ ,  $y = \phi(x)$ . Sei  $s$  die Spiegelung aus dem letzten Lemma, die  $x$  auf  $y$  abbildet. Dann ist  $s\phi \in K|_g$

halbeneerhaltend, richtungserhaltend und hat einen Fixpunkt. Also ist  $s\phi = \text{id}$  und  $\phi = s^{-1} = s$ . Ist  $\tau$  eine Verschiebung, so ist  $\phi\tau$  eine Nichtverschiebung, also selbst eine Spiegelung. Damit schreiben wir  $\tau$  als Produkt von zwei Spiegelungen.

Zu (ii): Sei  $\tau$  Verschiebung,  $x \in g$ ,  $y = \tau(x)$ ,  $s = s_h \in K|_g$  die Spiegelung, die  $x$  und  $y$  vertauscht. Sei  $z$  der Schnittpunkt von  $h$  und  $g$ . (Er existiert, da die beiden Geraden senkrecht sind.) Sei  $\tau' \in \vec{g}$  die Verschiebung, die  $x$  auf  $z$  abbildet. Wir behaupten  $\tau'^2 = \tau$ . Sei  $\sigma$  die Spiegelung, die  $x$  und  $z$  vertauscht. Dann ist  $s\sigma$  eine Verschiebung, mit  $x \mapsto z \mapsto z$ , also  $s\sigma = \tau'$  und  $\tau'^2 = s\sigma s\sigma$ . Die Abbildung  $\sigma' = s\sigma s$  ist eine Spiegelung mit  $z \mapsto z \mapsto x \mapsto y$ . Dann ist  $\sigma'\sigma$  eine Verschiebung mit  $x \mapsto z \mapsto y$ , also  $\tau$  wie gewünscht.

Zu (iii): Sei  $\tau$  Verschiebung,  $\phi \in K|_g$  Spiegelung mit Fixpunkt  $x$ . Wir rechnen weiter mit den Abbildungen aus dem letzten Punkt. Es ist  $\tau' = s\sigma = \sigma's$  und  $\tau'\phi$  die Spiegelung mit  $x \mapsto x \mapsto z$ , also  $\tau'\phi = \sigma$ . Es folgt

$$\phi\tau'\phi = \phi\sigma = \tau'^{-1}$$

denn  $\phi\sigma$  ist eine Verschiebung mit  $z \mapsto y \mapsto x$ . Es folgt dann auch

$$\phi\tau\phi = (\phi\tau'\phi)(\phi\tau'\phi) = \tau'^{-1}\tau'^{-1} = \tau^{-1}.$$

Zu (iv): Sei  $s$  eine beliebige Spiegelung in  $K|_g$ . Wir betrachten die Abbildung  $S : \vec{g} \rightarrow \vec{g}$  mit  $\tau \mapsto s\tau s = \tau^{-1}$ . Für  $\tau_1, \tau_2 \in \vec{g}$  folgt dann

$$\tau_2^{-1}\tau_1^{-1} = (\tau_1\tau_2)^{-1} = S(\tau_1\tau_2) = S(\tau_1)S(\tau_2) = \tau_1^{-1}\tau_2^{-1}$$

Damit ist die Gruppe kommutativ. □

Das ‘‘Wurzelziehen’’ kann als Konstruktion des Mittelpunktes einer Strecke aufgefasst werden.

**Lemma 4.18.** *Seien  $x \neq y$  Punkte auf  $g$ . Wir wählen eine verträglich Ordnung auf  $g$ , so dass  $x < y$ . Wir definieren rekursiv die Folge  $x_n \in [x, y]$ , wobei  $x_1 = x$  und  $x_n$  der Mittelpunkt der Strecke  $[x_{n-1}, y]$  ist. Dann ist*

$$y = \sup x_n.$$

*Beweis:* Die Folge  $(x_n)_{n \geq 1}$  ist beschränkt. Sei  $z$  das Supremum. Angenommen,  $z \neq y$ . Dann ist  $z < y$ . Sei  $\tau$  die Verschiebung entlang  $g$ , die  $y$  auf  $z$  abbildet. Wir betrachten  $z' = \tau(z)$ . Es ist  $z < y$ , also  $\tau(z) < \tau(y) < z$ . Da  $z$  das Supremum der  $x_n$  ist, gibt es  $x_n$  mit  $z' < x_n < z < y$ . Der Mittelpunkt der Strecke  $[x_n, y]$  liegt zwischen dem Mittelpunkt  $z$  der Strecke  $[z', y]$  und  $y$ , d.h.  $z < x_{n+1}$ . Dies widerspricht der Supremumseigenschaft von  $z$ . □

### 4.3 Koordinatisierung

**Satz 4.19.** *Sei  $(X, G, Z, K)$  eine fast-euklidische Geometrie,  $g$  eine Gerade. Dann ist  $\vec{g}$  isomorph zu  $(\mathbb{R}, +)$ . Genauer: Für jedes nicht-triviale  $\tau_0 \in \vec{g}$  gibt es genau einen Gruppenisomorphismus*

$$\Phi : \vec{g} \rightarrow \mathbb{R}$$

der  $\tau_0$  auf 1 abbildet und jede zu  $\tau_0$  gleichgerichtete Verschiebung auf eine positive Zahl.

*Beweis:* Wir bemerken vorab, dass für jedes  $\tau \neq \text{id}$  die von  $\tau$  erzeugte Untergruppe isomorph ist zu  $\mathbb{Z}$  d.h. die  $\tau^n$  sind paarweise verschieden, da für jedes  $x \in g$  die Menge  $\{\tau_0^n(x) | n \in \mathbb{Z}\}$  unbeschränkt ist.

Wir definieren  $\Phi$  zunächst auf der Untergruppe  $\langle \tau_0 \rangle = \langle \tau_0^n | n \in \mathbb{Z} \rangle$  durch  $\tau_0^n \mapsto n$ . Diese Abbildung ist wohldefiniert nach der Vorbemerkung.

Es existiert ein eindeutiges  $\tau'_0 \in \overrightarrow{g}$  mit  $\tau_0'^2 = \tau_0$ . (Die Eindeutigkeit folgt wieder aus der Vorbemerkung.) Wir definieren  $\Phi(\tau'_0) = 1/2$ . Dies ist die einzige mögliche Wahl. Mit demselben Argument ist  $\Phi$  definiert für jedes  $\tau \in \overrightarrow{g}$  mit  $\tau^{2^n} = \tau_0^m$  für  $n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$ . Sei  $U$  die Untergruppe dieser Elemente.

Wir nennen ein Element von  $\overrightarrow{g}$  *positiv*, wenn es nicht-trivial ist und gleichgerichtet zu  $\tau_0$ . Wir setzen  $\tau < \tau'$ , wenn  $\tau'\tau^{-1}$  positiv ist. Damit wird  $\overrightarrow{g}$  zu einer total geordneten Gruppe.

Sie erfüllt das Supremumsaxiom, weil es für  $g$  gilt. Genauer: Wir wählen wir die verträglich Anordnung mit der  $x < \tau_0(x)$ . Sei  $x_0 \in g$  fest. Dann ist  $\overrightarrow{g} \rightarrow g$  mit  $\tau \mapsto \tau(x_0)$  anordnungserhaltend und bijektiv. Für eine beschränkte Folge in  $\overrightarrow{g}$  hat die Bildfolge ein Supremum in  $g$ , dessen Urbild ist das Supremum in  $\overrightarrow{g}$ .

Sei nun  $\tau \in \overrightarrow{g}$  beliebig. Ohne Einschränkung ist  $x_0 < \tau(x_0) =: y$ , sonst betrachten wir  $\tau^{-1}$ . Da die Folge der  $\tau_0^n(x_0)$  unbeschränkt ist, gibt es  $n \geq 1$ , so dass  $\tau_0^n(x_0) > y$ . Damit  $y \in [x_0, \tau_0^n(x_0)]$ . Durch Intervallhalbierung konstruieren wir eine Folge von Punkte  $y_n$  mit Supremum gleich  $y$ . Nach Konstruktion ist jeder dieser Punkte ist von der Form  $\tau_n(x_0)$  für ein  $\tau_n \in U$ . Wir definieren

$$\Phi(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(\tau_n).$$

Dies ist die einzige Möglichkeit, wenn  $\Phi$  mit der Anordnung verträglich sein soll. Man überlegt leicht, dass die Abbildung wohldefiniert ist, d.h. sie hängt nicht von der Wahl der Folge  $\tau_n$  ab. Dann ist es leicht zu überprüfen, dass sie auch die Multiplikation in die Addition überführt.  $\square$

**Bemerkung.** Wählen wir zusätzlich ein  $x_0 \in g$ , so erhalten wir auch genau eine Bijektion  $\Psi : g \rightarrow \mathbb{R}$ , die  $x_0$  auf 0 abbildet und mit  $\Phi$  verträglich ist. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{g} \times g & \longrightarrow & g \\ (\Phi, \Psi) \downarrow & & \downarrow \Psi \\ \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \xrightarrow{+} & \mathbb{R} \end{array}$$

kommutiert. Es ist nämlich  $\Psi(x) = \Phi(\overrightarrow{x_0 x})$ .

Die Wahl des Isomorphismus definiert eine skalare Multiplikation

$$\mathbb{R} \times \overrightarrow{g} \rightarrow \overrightarrow{g}$$

durch die Formel

$$\lambda \cdot \tau = \Phi^{-1}(\lambda) \circ \tau = \Phi^{-1}(\lambda \Phi(\tau)).$$

**Lemma 4.20.** *Die skalare Multiplikation ist unabhängig von der Wahl von  $\tau_0$ .*

*Beweis:* Seien  $\Phi$  und  $\Phi'$  durch  $\tau_0$  und  $\tau'_0$  definiert. Dann ist  $A = \Phi\Phi'^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ein Gruppenisomorphismus, der entweder die Anordnung respektiert oder umkehrt. Wir behaupten, dass jeder solche Homomorphismus die Multiplikation mit einer Zahl  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  ist, nämlich mit  $\lambda = A(1)$ . Da  $A$  ein Homomorphismus ist, gilt die Formel für alle rationalen Zahlen. Da die rationalen Zahlen dicht in  $\mathbb{R}$  liegen und  $A$  Suprema in Suprema abbildet (anordnungserhaltend) oder in Infima (anordnungsumkehrend) gilt die Formel auf ganz  $\mathbb{R}$ . Insbesondere ist  $A$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung.  $\square$

Was fehlt eigentlich zu einem affinen Raum? Die Gruppenstruktur auf  $\vec{X}$ ! Hier benutzen wir endlich das Parallelenaxiom.

**Satz 4.21.** *Sei  $(X, G, Z, K)$  eine euklidische Geometrie. Dann gilt:*

(i) *Die Verschiebungen längs paralleler Geraden sind dieselben, in Formeln:*  
 $g \parallel g' \Rightarrow \vec{g} = \vec{g}'.$

(ii) *Die Menge  $\vec{X}$  ist eine kommutative Untergruppe von  $K$ .*

(iii) *Die Gruppe  $\vec{X}$  operiert einfach transitiv auf  $X$ .*

*Beweis:* Seien  $g$  und  $g'$  parallel. Wir haben die Elemente von  $\vec{g}$  charakterisiert als die Produkte  $s_h s_{h'}$ , wobei  $h, h'$  zwei auf  $g$  senkrechte Geraden sind. Wir setzen das starke Parallelenaxiom voraus, daher sind die zu  $g$  parallelen Geraden genau die zu  $h$  (und  $h'$ ) senkrechten. Daher ist  $s_h s_{h'}$  auch eine Verschiebung entlang  $g'$ .

Sei  $x \in X$ ,  $g, h$  Geraden durch  $x$ ,  $\tau$  und  $\sigma$  Verschiebungen in Richtung  $g$  und  $h$ . Wir vergleichen  $\sigma\tau(x)$  und  $\tau\sigma(x)$ . Sei  $g'$  die Parallele zu  $g$  durch  $\sigma(x)$  und  $h'$  die Parallele zu  $h$  durch  $\tau(x)$ . Es ist  $\sigma(g) = g'$ , denn  $\sigma(g)$  ist eine Gerade, die  $g$  nicht schneidet und durch  $\sigma(x)$  verläuft. Ebenso ist  $\tau(h) = h'$ . Wir fassen  $\tau \in \vec{g}'$  auf. Der Bildpunkt  $\tau(\sigma(x))$  liegt also auf der Geraden  $g'$ . Er liegt auch auf  $\tau(h) = h'$ , ist also der Schnittpunkt dieser beiden Geraden. Symmetrisch ist derselbe Schnittpunkt auch  $\sigma(\tau(x))$ .

Als nächstes überzeugen wir uns, dass  $\sigma\tau$  eine Verschiebung ist, genauer die Verschiebung  $\phi$  entlang der Gerade  $l$  durch  $g \cap h$  und  $g' \cap h'$ . Ist  $y$  ein weiterer Punkt auf  $l$ , so berechnen wir  $\sigma\tau(y)$ , indem wir  $g, g', h, h'$  um  $\vec{x}\vec{y}$  verschieben. Mit  $x, y$  und  $g' \cap h'$  liegt auch  $\sigma\tau(y) = \vec{x}\vec{y}(g' \cap h')$  auf der Geraden  $l$ , d.h. die Gerade wird von  $\sigma\tau$  respektiert. Ebenso landen Punkte auf einer Seite von  $l$  auf der selben Seite von  $l$ , also ist  $\sigma\tau$  halbebenenerhaltend. Sie ist auch richtungserhaltend, also eine Verschiebung. Damit ist  $\vec{X}$  eine Untergruppe.

Die Operation ist transitiv, denn zu je zwei Punkten existiert eine Gerade  $g$  durch die Punkte und dann eine Verschiebung in  $\vec{g}$ , die den einen auf den anderen abbildet. Sei  $x \in X$ . Zu jeder Gerade gibt es eine parallele Gerade durch  $x$ . Es gilt also  $\vec{X} = \bigcup_{x \in g} \vec{g}$ . Die Standgruppe von  $x$  ist trivial, weil sie in jedem  $\vec{g}$  trivial ist.  $\square$



**Korollar 4.22.** *Mit der Skalarmultiplikation auf jedem  $\vec{g}$  wird  $\vec{X}$  zu einem reellen Vektorraum.*

*Beweis:* Zu überprüfen sind die Vektorraumaxiome. Nur die Rechenregel

$$\lambda(\tau + \sigma) = \lambda\sigma + \lambda\tau, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \sigma, \tau \in \vec{X}$$

ist noch offen. (Wir gehen hier zur additiven Notation über.) Wir gehen vor wie bei der Definition der Vektorraumstruktur auf den eindimensionalen  $\vec{g}$ . Die Rechenregel gilt für  $\lambda \in \mathbb{Z}$ , da  $\vec{X}$  eine kommutative Gruppe ist. Sie setzt sich fort auf alle  $\lambda = a/2^n$  mit  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $n \geq 0$ . Mit der Supremumseigenschaft dehnt sich die Formel dann auf alle reellen  $\lambda$  aus.  $\square$

**Korollar 4.23.** *Sei  $(X, G, Z, K)$  eine euklidische Ebene. Dann ist  $(X, G)$  ein affiner Raum zu  $\vec{X}$ , und alle Elemente von  $K$  sind affine Bewegungen.*

*Beweis:* Wir wissen bereits, dass  $\vec{X}$  einfach transitiv auf  $X$  operiert. Wir müssen die Geraden in  $G$  mit den affinen Geraden vergleichen.

Eine Teilmenge von  $X$  ist eine affine Gerade, wenn sie von der Form  $x_0 + U$  für einen eindimensionalen Untervektorraum  $U \subset \vec{X}$  ist. Ein solches  $U$  ist von der Form  $\vec{g}$  für eine Gerade  $g \in G$ . Ohne Einschränkung verläuft  $g$  durch  $x_0$ . Die Punkte von  $g$  sind dann genau die Bilder von  $x_0$  unter allen Verschiebungen in  $\vec{g}$ . Mit anderen Worten:  $x_0 + U = g$ . Die Umkehrung geht genauso.

Sei  $\phi \in K$ . Dann definiert  $\phi : X \rightarrow X$  einen Isomorphismus von Inzidenzgeometrien mit Zwischenrelation und Kongruenzen. Die zugehörige Abbildung auf Kongruenzgruppen ist  $\sigma \mapsto \phi\sigma\phi^{-1}$ . Sie bildet also Verschiebungen in Verschiebungen ab, d.h. wir erhalten einen Gruppenhomomorphismus  $\phi_* : \vec{X} \rightarrow \vec{X}$ . Da die Vektorraumstruktur bereits eindeutig durch die additive Struktur und die Operation auf Geraden bestimmt ist, ist  $\phi_*$  sogar  $\mathbb{R}$ -linear. Die Zuordnung ist automatisch verträglich mit der Operation von  $\vec{X}$  auf  $X$ .  $\square$

Wir können nun Koordinaten auf  $X$  einführen. Seien  $g$  und  $h$  senkrecht aufeinander stehende Geraden mit Schnittpunkt  $x_0$ . Sei  $x_1 \in g$  ein weiterer Punkt, sowie  $y_1 \in h$  das Bild von  $x_1$  unter einer Kongruenzabbildung, die die Gerade  $g$  nach  $h$  abbildet und  $x_0$  festhält. Zu jedem Punkt  $z \in X$  seien  $(x, y) \in g \times h$  die Fußpunkte des Lotes auf  $g$  und  $h$ . Sie haben die Form  $\overrightarrow{x_0x} = \lambda\overrightarrow{x_0x_1}$ ,  $\overrightarrow{x_0y} = \mu\overrightarrow{x_0y_1}$  für  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Insgesamt erhalten wir eine Abbildung

$$X \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad z \mapsto (\lambda, \mu).$$

**Bemerkung.** Wir wissen jetzt, dass jede euklidische Ebene als Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation isomorph ist zur kartesischen Ebene. Die eben beschriebene Koordinatisierung definiert eine Bijektion  $X \rightarrow \mathbb{R}^2$  und einen Vektorraumisomorphismus  $\vec{X} \rightarrow \mathbb{R}^2$  verträglich mit der affinen Struktur. Sie respektiert die Zwischenrelation, da der Isomorphismus  $\vec{g} \rightarrow \mathbb{R}$  anordnungserhaltend war. Der Beweis von Theorem 4.1 ist damit aber noch nicht beendet. Wir müssen noch zeigen, dass die Kongruenzgruppen diesselben sind. Das schieben wir noch eine Weile auf.



# Stand der Dinge

Bevor es weitergeht, wollen wir zusammenfassen, was wir gemacht haben und was noch offen ist.

## Axiome

Wie in der Einleitung versprochen haben wir ein Axiomensystem für die euklidische Ebene vorgestellt.

- Inzidenzgeometrie 1.3, Dreieck 3.1
- schwaches und starkes Parallelenaxiom 4.8, 3.21
- Zwischenrelation und das Axiom von Pasch 3.2, Supremumsaxiom 3.13
- Kongruenzen 3.14

Eine fast-euklidische Ebene erfüllt alle Axiome bis auf das Parallelenaxiom.

## Beispiele

Wir haben mehrere Beispielgeometrien, ihre Symmetrien und strukturerhaltenden Abbildungen kennengelernt:

- Affine und projektive Räume sind Inzidenzgeometrien (Kapitel 1).
- Die affine Ebene über einem angeordneten Körper ist eine Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation (Kapitel 3)
- Die kartesische Ebene 3.17 ist euklidisch (Kapitel 3). Tatsächlich gilt auch die Umkehrung: Theorem 4.1.
- Die hyperbolische Ebene 1.20 ist fast-euklidisch (Theorem 3.23).
- In der projektiven Ebene ist das schwache Parallelenaxiom verletzt. Sie ist nie fast-euklidisch.

Die Beweise der beiden Theoreme stehen noch aus!

### Noch zu erledigen

- Beweis von Theorem 3.23.
- Beweis des Hauptsatzes Theorem 4.1.
- Diskussion des Supremumsaxioms, wie in Kapitel 3 versprochen
- Herleitung des Satzes von der Winkelsumme im Dreieck aus den Axiomen, wie in der Einleitung angekündigt.
- Definition von Winkeln, Kongruenz, Kreis, Längen, Flächen
- Beweis der Kongruenzsätze u.ä., Satz des Pythagoras

# Kapitel 5

## Möbiusgeometrie

Wir wissen bereits, dass die hyperbolische Ebene eine Inzidenzgeometrie ist und haben auch die Zwischenrelation eingeführt. Wir wollen nun verifizieren, dass die Gruppe der hyperbolischen Bewegungen daraus eine fast-euklidische Geometrie macht. Wir schreiben  $\text{Hyp}_2$ . Wir erinnern uns, dass  $\text{PGl}_2(\mathbb{R})^+ \subset \text{Hyp}_2$ .

### 5.1 Operation von Möbiustransformationen

**Lemma 5.1.** *Die Gruppe  $\text{PGl}_2(\mathbb{R})^+$  operiert transitiv auf  $\mathbb{H}^2$ .*

*Beweis:* Sei  $z_0 \in \mathbb{H}^2 \subset \mathbb{C}$  beliebig. Durch Anwenden einer Verschiebung bilden wir  $z_0$  auf die imaginäre Achse ab. Durch Multiplikation mit einem geeigneten reellen Faktor bilden wir das Bild auf  $i$  ab. Beides sind Elemente von  $\text{PGl}_2(\mathbb{R})^+$ .  $\square$

Wir berechnen die Standgruppe von  $i$ :

$$\frac{ai + b}{ci + d} = i \Leftrightarrow ai + b = -c + id \Leftrightarrow a = d, b = -c.$$

Als nächstes wollen wir die Operation auf der Menge der Gerade und auf der Menge der Halbgeraden verstehen. Wir erinnern uns: es gibt zwei Typen von hyperbolischen Geraden in  $\mathbb{H}^2$ . Halbkreise mit Mittelpunkt auf  $\mathbb{R}$  und senkrecht auf  $\mathbb{R}$  stehende Halbgeraden. Die beiden Typen unterscheiden sich durch die Anzahl der Randpunkte in  $\mathbb{R}$ . Wenden wir auf einen Halbkreis eine Möbiustransformation in  $\text{PGl}_2(\mathbb{R})^+$  an, die einen Endpunkt nach  $\infty$  abbildet, so ist das Bild eine senkrechte Halbgerade. Solche Möbiustransformationen gibt es stets:

**Lemma 5.2.** *Die Gruppe  $\text{PGl}_2(\mathbb{R})^+$  operiert transitiv auf  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .*

*Beweis:* Sei  $z_0 \in \mathbb{R}$ . Jede Möbiustransformation  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  bildet  $z_0$  nach  $\infty$  ab. Wir wählen also  $(a, b)$  linear unabhängig von  $(1, -z_0)$ . Falls die Matrix eine negative Determinante hat, ersetzen wir  $(a, b)$  durch  $(-a, -b)$ .  $\square$

**Lemma 5.3.** *Die Gruppe  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})^+$  operiert transitiv auf der Menge der hyperbolischen Geraden.*

*Beweis:* Sei  $g$  eine hyperbolische Gerade. Wenn  $g$  eine euklidische Gerade ist, die senkrecht auf  $\mathbb{R}$  steht, so wird sie durch eine Verschiebung  $z \mapsto z + b$  auf die imaginäre Achse abgebildet.

Andernfalls ist  $g$  ein Halbkreis mit Mittelpunkt  $z_0 \in \mathbb{R}$  und Endpunkten  $z_1, z_2$ . Wir wählen eine Möbiustransformation, die  $z_1$  nach  $\infty$  abbildet. Das Bild von  $g$  ist dann eine Gerade, die senkrecht auf  $\mathbb{R}$  steht. Diesen Fall haben wir bereits behandelt.  $\square$

Wir berechnen die Standgruppe der imaginären Achse  $\{\lambda i \mid \lambda > 0\}$ , also die Gruppe der Möbiustransformationen  $M : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ , die diese Menge in sich selbst abbilden. Notwendige und hinreichende Bedingung ist, dass die beiden Endpunkte 0 und  $\infty$  entweder festgehalten oder vertauscht werden. Die Abbildung  $z \mapsto -1/z$  vertauscht sie, daher reicht es den ersten Fall zu betrachten.

$$0 = M(0) = \frac{0+b}{0+d} \Leftrightarrow b = 0$$

und

$$\infty = M(\infty) = \frac{a}{c} \Leftrightarrow c = 0,$$

also

$$M(z) = \frac{az}{d} = rz$$

mit  $ad > 0$ , d.h.  $r > 0$ .

**Lemma 5.4.** *Die Gruppe  $\mathrm{PGL}_2^+(\mathbb{R})$  operiert einfach transitiv auf der Menge der hyperbolischen Halbgeraden.*

*Beweis:* Sei  $H$  eine hyperbolische Halbgerade mit Ecke  $P$ . Wir wollen sie abbilden auf die hyperbolische Halbgerade  $H_0 = \{\lambda i \mid \lambda \geq 1\}$  mit Ecke  $i$ .

Da  $\mathrm{PGL}_2^+(\mathbb{R})$  transitiv auf der Menge der hyperbolischen Geraden operiert, finden wir eine Möbiustransformation, die die zugrundeliegende hyperbolische Gerade auf die imaginäre Achse abbildet. Durch Anwenden einer Abbildung der Form  $z \mapsto rz$  bilden wir das Bild von  $P$  auf  $i$  ab. Damit sind wir entweder auf  $H_0$  gelandet oder auf  $S(H_0)$  wobei  $S(z) = -1/z$ . Durch Anwenden von  $S$  erreichen wir auch im zweiten Fall  $H_0$ , wie gewünscht.

Die Elemente der Standgruppe von  $H_0$  respektieren die imaginäre Achse und fixieren den Endpunkt  $\infty$ , sind also von der Form

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Gleichzeitig liegen sie in der Standgruppe von  $i$ , also Abbildungen der Form

$$z \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

Einzigste Möglichkeit ist die Identität.  $\square$

Wir erinnern uns, dass die Kongruenzgruppe nicht  $\mathrm{PGL}_2^+(\mathbb{R})$ , sondern  $\mathrm{Hyp}_2$  sein soll. Hinzu kommt die Spiegelung am Einheitskreis  $S : z \mapsto 1/\bar{z}$ . Nach Definition wird  $\mathrm{Hyp}_2$  von  $S$  und den Elementen aus  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})^+$  erzeugt.

**Lemma 5.5.** *Sei  $M \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})^+$ . Dann ist*

$$S^{-1}MS = SMS \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})^+.$$

*Proof.* Es genügt, die Aussage für die Erzeuger von  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})^+$  nachzurechnen. Sei  $M_1(z) = az$  für  $a > 0$ ,  $M_2(z) = z + b$  für  $b \in \mathbb{R}$ ,  $M_3(z) = -1/z$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} SM_1S(z) &= S(a\bar{z}^{-1}) = a^{-1}z, \\ SM_2S(z) &= S(\bar{z}^{-1} + b) = \frac{1}{z^{-1} + b} = \frac{z}{1 + bz} \\ SM_3S(z) &= S(-\bar{z}) = -z \end{aligned}$$

In jedem Fall erhalten wir eine Möbiustransformation. □

**Bemerkung.** In der Sprache der Gruppentheorie:  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})^2 \subset \mathrm{Hyp}_2$  ist ein Normalteiler vom Index zwei.

**Korollar 5.6.** *Die Elemente von  $\mathrm{Hyp}_2$  sind eindeutig von der Form*

$$MS^\varepsilon$$

mit  $M \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ ,  $\varepsilon = 0, 1$ .

*Beweis:* Nach Definition ist  $\mathrm{Hyp}_2$  die von  $S$  und  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})^2$  erzeugte Gruppe. Zu zeigen ist also, dass die Menge der Elemente in der angegebenen Form abgeschlossen ist unter Multiplikation und Inversenbildung. Dafür genügt es zu zeigen, dass es für jedes  $M \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})^+$  ein  $M' \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})^+$  gibt mit

$$SM = M'S.$$

Wir setzen  $M' = SMS$ . □

**Korollar 5.7.** *Die Gruppe  $\mathrm{Hyp}_2$  operiert zweifach transitiv auf der Menge der hyperbolischen Halbgeraden.*

*Beweis:* Bereits die Untergruppe  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})^+$  operiert transitiv. Wir berechnen die Standgruppe des Viertelkreises  $\{e^{i\phi} | 0 < \phi \leq \pi/2\}$  mit Ecke  $i$ . Er wird von  $S$  punktweise festgehalten. Ist also  $MS^\varepsilon$  in der Standgruppe, dann auch  $M$ . Wir wissen bereits, dass  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})^+$  einfach transitiv operiert, daher ist  $M = \mathrm{id}$ . Die Standgruppe hat genau zwei Elemente. □

### 5.1.1 Die hyperbolische Ebene als fast-euklidische Geometrie

Damit können wir verifizieren, dass die hyperbolische Ebene mit der gewählten Zwischenrelation und der Kongruenzgruppe  $\text{Hyp}_2$  eine fast-euklidische Geometrie ist.

*Beweis von Theorem 3.23.* Für die Zwischenrelation überprüfen wir das Axiom von Pasch. Sei also  $A, B, C$  ein Dreieck,  $g$  eine hyperbolische Gerade. Zu untersuchen sind die Schnittpunkte der von  $g$  mit den Seiten des Dreiecks. Durch Anwenden einer Möbiustransformation bilden  $g$  auf die imaginäre Achse ab. Es genügt daher, diesen Fall zu betrachten.

Wir unterscheiden, wie sich die drei Punkte auf die beiden Seiten der Achse verteilen, also ob ihr Realteil positiv oder negativ ist. Durch Anwenden der Spiegelung an der imaginären Achse werden die beide Seiten vertauscht. Daher bleiben zwei Fälle: alle drei Punkte haben positiven Realteil oder  $A, B$  haben positiven Realteil und  $C$  negativen.

Wir betrachten zuerst den Fall, dass  $A, B, C$  positiven Realteil haben. Die Strecken  $[A, B]$ ,  $[A, C]$  und  $[B, C]$  sind Kreissegmente (oder vertikale Geraden-segmente). Der Realteil der Punkte liegt dabei zwischen den Realteilen der Endpunkte. Er ist in jedem Fall positiv. Keine der Strecken schneidet die imaginäre Achse.

Falls  $C$  negativen Realteil hat und  $A, B$  positiven, so schneiden die Segmente  $[A, C]$  und  $[B, C]$  die imaginäre Achse, aber  $[A, B]$  nicht.

Das ist genau das gewünschte Verhalten.

Das Supremumsaxiom ist erfüllt, weil die hyperbolischen Geraden durch Intervalle in  $\mathbb{R}$  parametrisiert werden können. Die Operation der Kongruenzgruppe haben wir bereits überprüft.  $\square$

**Bemerkung.** Wir haben damit bewiesen, dass das Parallelnaxiom *unabhängig* ist von den anderen Axiomen. Weder folgt es, noch ist es ein Widerspruch. Diese Art von Aussage wird immer durch die Konstruktion eines Beispiels, eines *Modells* gezeigt.

Nun wollen wir die Konstruktionen und Sätze aus Kapitel 4 im hyperbolischen Fall konkretisieren.

Wir betrachten weiter die Halbgerade  $H_0 = \{\lambda i \mid \lambda \geq 1\}$ . Die eindeutige nicht-triviale hyperbolische Bewegung, die die Halbgerade stabilisiert, ist die Spiegelung  $S_0 : x + iy \mapsto -x + iy$ . Wie in Lemma 4.2 behauptet, wird die gesamte hyperbolische Gerade punktweise fixiert. Wie in Lemma 4.5 behauptet vertauscht sie die beiden Seiten der hyperbolischen Geraden, nämlich den rechten und linken Halbraum.

Die hyperbolischen Geraden, die von dieser Spiegelung in sich abgebildet werden sind die Kreise mit Mittelpunkt 0. Sie sind also senkrecht auf  $H_0$ . Durch jeden Punkt von  $\mathbb{H}^2$  gibt es genau einen von diesen, Lote existieren. Wir konzentrieren uns auf den Punkt  $i$ . Das Lot auf  $H_0$  durch  $i$  ist der Einheits(halb)kreis.



Die Spiegelung an diesem Kreis ist  $S : z \mapsto \bar{z}^{-1}$ . Die Spiegelungen  $S$  und  $S_0$  vertauschen, wie in Satz 4.7 allgemein hergeleitet.

Wir betrachten nun die hyperbolischen Bewegungen, die die imaginäre Achse in sich überführen. Darunter sind die halbebenenerhaltenden Abbildungen die Möbiustransformationen, die die imaginäre Achse stabilisieren. Wir haben sie oben explizit berechnet. Richtungserhaltend sind darunter genau die Abbildungen  $z \mapsto rz$  für  $r > 0$ . Sie bilden die Gruppe der Verschiebungen. Via des Gruppenisomorphismus  $\exp : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$  identifizieren wir die Gruppe wie erwartet mit  $\mathbb{R}$ .

Das Parallelenaxiom gilt nicht, Verschiebungen in Richtung verschiedener Geraden kommutieren nicht.



# Kapitel 6

## Kongruenzsätze

Im gesamten Kapitel arbeiten wir in einer euklidischen Ebene.

### Winkel und Kongruenzen

**Definition 6.1.** *Ein Winkel ist die Schnittmenge von zwei Halbebenen. Es handelt sich um einen rechten Winkel, wenn die beiden begrenzenden Geraden auf einander senkrecht steht. Er heißt gestreckt, wenn die beiden Halbebenen gleich sind.*

Jeder Winkel außer dem gestreckten definiert zwei Halbgeraden mit gemeinsamer Ecke, die *Schenkel*. Im Falle eines gestreckten Winkels betrachten wir jeden Punkt der Geraden als Ecke und dann die beiden Seiten als Schenkel.

**Definition 6.2.** *Zwei Strecken  $[x, y]$  und  $[x', y']$  heißen kongruent, wenn es eine Kongruenzabbildung  $\phi$  gibt mit  $\phi([x, y]) = [x', y']$ . Ebenso definieren wir Kongruenz von Winkeln.*

Um mit Kongruenz von Winkeln gut arbeiten zu können, müssen wir verstehen, welche Kongruenzen einen Winkel in sich abbilden.

**Lemma 6.3** (Winkelhalbierung). *Für jeden Winkel gibt es genau zwei Kongruenzen, die den Winkel in sich abbilden, die Identität und eine eindeutige Spiegelung, die die beiden Schenkel vertauscht.*

*Beweis:* Zu zeigen ist die Existenz der Spiegelung. Seien  $h_1$  und  $h_2$  die Schenkel. Sei  $\phi$  eine Kongruenz, die  $h_1$  auf  $h_2$  abbildet. Dann hat auch  $s_{h_2}\phi$  dieselbe Eigenschaft. Wir behaupten, dass eine der beiden Abbildungen eine Spiegelung ist. Sie bildet dann  $h_2$  auf  $h_1$  ab, wie gewünscht.

Die beiden Kongruenzen induzieren lineare Abbildungen auf  $\vec{X}$ . Eine der beiden hat negative Determinante, da die von einer Spiegelung induzierte Abbildung negative Determinante hat. Mit dieser arbeiten wir weiter und nenne sie  $\psi$ . Sie hält die Ecke  $P$  des Winkels fest.

Sei  $f : \vec{X} \rightarrow \vec{X}$  die induzierte lineare Abbildung. Wir setzen also voraus, dass  $\det(f) < 0$ . Sei  $\alpha \in \mathbb{C}$  ein Eigenwert. Ist  $\alpha \notin \mathbb{R}$ , so ist  $\bar{\alpha}$  der zweite Eigenwert, da das charakteristische Polynom von  $f$  reelle Koeffizienten hat. Dann ist  $\det(f) = \alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2 > 0$ , ein Widerspruch. Also ist  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann gibt es einen weiteren Eigenwert  $\beta \in \mathbb{R}$ . Ihr Produkt ist negativ, also ist genau einer der Eigenwerte negativ. Sei  $v$  ein Eigenvektor zum positiven Eigenwert. Die Kongruenz  $\psi$  respektiert die Halbgerade  $P + \mathbb{R}_{\geq 0}v$ , hält sie also punktweise fest. Sie ist nicht-trivial, also ist  $\psi$  die Spiegelung an der Geraden durch  $P$  mit Richtungsvektor  $v$ .  $\square$

Kongruenz von Strecken bzw. Winkeln ist eine Äquivalenzrelation (Übungsaufgabe).

**Satz 6.4** (Stufenwinkel). *Seien  $H_1, H_2$  Halbebenen zu parallelen Geraden  $h_1$  und  $h_2$  mit  $H_1 \subset H_2$  oder umgekehrt. Sei  $H_3$  eine weitere Halbebene zu einer Geraden  $h_3$ , die nicht parallel zu  $h_1$  und  $h_2$  ist. Dann sind die Winkel  $H_1 \cap H_3$  und  $H_2 \cap H_3$  kongruent.*

*Beweis:* Sei  $\tau$  die Verschiebung entlang  $h_3$ , die  $h_1 \cap h_3$  auf  $h_2 \cap h_3$  abbildet. Dies ist die gesuchte Kongruenz zwischen den Winkeln.  $\square$

Der nächste Beweis benutzt eine Kongruenzabbildung, die von unabhängigem Interesse ist.

**Definition 6.5.** *Sei  $x_0 \in X$  ein Punkt eines affinen Raums. Die Punktspiegelung an  $x_0$  ist die affine Bewegung  $x = x_0 + \vec{x_0x} \mapsto x_0 - \vec{x_0x}$ .*

**Lemma 6.6.** *In der euklidischen Ebene ist die Punktspiegelung an  $x_0$  eine Kongruenzabbildung. Sie erhält jede Gerade durch  $x_0$  und vertauscht ihre Seiten.*

*Beweis:* Sei  $g$  Gerade durch  $x_0$ ,  $h$  das Lot auf  $g$  durch  $x_0$ . Sei  $\phi = s_h s_g$ . Dies ist eine Kongruenzabbildung, die  $g$  respektiert und die beiden Seiten von  $g$  vertauscht. Wir identifizieren wie in Kapitel 4  $X$  mit  $\mathbb{R}^2$ , wobei wir  $g$  und  $h$  als Koordinatenachsen wählen. In diesen Koordinaten gilt nach Satz 4.17 (iii)  $s_g(0, 1) = (0, -1)$ . Die Abbildungsmatrix für die induzierte lineare Abbildung ist also  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Die Abbildungsmatrix für die von  $s_h$  induzierte Abbildung hat vertauschte Vorzeichen. Für die Komposition erhalten wir  $-\text{id}$ . Also ist dies die Punktspiegelung.  $\square$

**Satz 6.7** (Gegenwinkel). *Seien  $H_1$  und  $H_2$  Halbebenen,  $\bar{H}_1$  und  $\bar{H}_2$  jeweils die entgegengesetzten Halbgeraden auf der anderen Seite der begrenzenden Geraden. Dann sind die Winkel  $H_1 \cap H_2$  und  $\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2$  kongruent.*

*Beweis:* Sei  $x_0$  der Schnittpunkt der begrenzenden Geraden. Die gesuchte Kongruenzabbildung ist die Punktspiegelung an  $x_0$ .  $\square$

**Korollar 6.8.** *In jeder euklidischen Ebene ergänzen sich die Innenwinkel eines Dreiecks zu einem gestreckten Winkel.*

*Beweis:* Genau wie der Beweis von Satz 0.1. Die nötigen Konstruktionen sind jetzt alle gerechtfertigt.  $\square$

**Bemerkung.** Man kann eine Addition von Strecken und Winkeln definieren und dann Rechenregeln herleiten. Wir werden dies aus Zeitgründen weglassen müssen. Man beachte, dass unsere Strecken und Winkel unorientiert sind.

Zu Ehren von Euklid:

**Satz 6.9.** *Alle rechten Winkel sind kongruent.*

*Beweis:* Wir wählen eine Kongruenz, die eine begrenzenden Halbgerade auf eine begrenzende Halbgerade des zweiten Winkels abbildet. Sie bilden dann die jeweils zweiten Geraden aufeinander ab, weil alle Kongruenzabbildungen Orthogonalität respektieren. Nach gegebenenfalls weiteren Spiegelungen haben wir einen rechten Winkel auf den anderen abgebildet.  $\square$

## Kongruenzsätze

**Definition 6.10.** *Zwei Dreiecke mit Ecken  $\{A, B, C\}$  und  $\{A', B', C'\}$  heißen kongruent, wenn es eine Kongruenzabbildung gibt, die die Eckenmenge der ersten auf die Eckenmenge des zweiten abbildet.*

**Satz 6.11.** *Ein Dreieck ist bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt durch*

- (i) *eine Seite und die beiden anliegenden Winkel, oder*
- (ii) *einen Winkel und die beiden anliegenden Seiten.*

*Beweis:* Seien  $A, B, C$  und  $A', B', C'$  die Ecken zweier Dreiecke. Seien  $[A, B]$  und  $[A', B']$  kongruent, sowie die Winkel bei  $A$  und  $A'$  und bei  $B$  und  $B'$ . Nach Voraussetzung gibt es Kongruenzabbildungen  $\phi, \phi_\alpha, \phi_\beta$ , die die Strecken bzw. Winkel miteinander identifizieren. Ohne Einschränkung ist  $\phi(A) = A', \phi(B) = B'$  (andernfalls komponiere mit der Spiegelung am Mittelpunkt der Strecke  $[A, B]$ ). Ohne Einschränkung liegen  $\phi(C)$  und  $C'$  auf derselben Seite der Geraden durch  $A'$  und  $B'$  (andernfalls komponiere mit der Spiegelung an der Geraden).

Nun betrachten wir  $\phi_\alpha$ . Ohne Einschränkung wird der Schenkel durch  $B$  auf den Schenkel durch  $B'$  abgebildet (sonst vertauschen wir die Schenkel). Es folgt dann  $\phi = \phi_\alpha$ . Genauso erhalten wir  $\phi = \phi_\beta$ .

Der Punkt  $C$  ist eindeutig bestimmt als Schnittpunkt der anderen Schenkel der Winkel bei  $A$  und  $B$ . Die Kongruenz  $\phi$  bildet ihn daher auf  $C'$  ab.

Der Beweis für die Aussage (ii) geht genauso.  $\square$

**Korollar 6.12.** *Seien  $A, B, C$  drei Seiten eines Dreiecks, in dem die Seiten  $[A, B]$  und  $[A, C]$  kongruent sind. Dann sind die Innenwinkel bei  $B$  und  $C$  kongruent.*

*Beweis:* Wir wenden die Spiegelung  $\sigma$  an, die die beiden Schenkel vertauscht. Die Punkte  $B$  und  $\sigma(C)$  liegen in derselben Halbgerade und die Strecken  $[A, B]$  und  $[A, \sigma(C)]$  sind kongruent via einer Kongruenz  $\phi$ . Diese respektiert die Gerade und die Richtung, also die Halbgerade. Damit hält sie die Gerade punktweise fest, also  $B = \sigma(C)$ .  $\square$

**Satz 6.13.** *Ein Dreieck ist bis auf Kongruenz durch die drei Seiten bestimmt.*

*Beweis:* Seien  $A, B, C$  und  $A', B', C'$  die Ecken zweier Dreiecke. Seien  $[A, B]$  und  $[A', B']$  kongruent, ebenso  $[A, C]$  zu  $[A', C']$ ,  $[B, C]$  zu  $[B', C']$ . Nach Anwenden einer Kongruenz ist ohne Einschränkung  $A = A'$ ,  $B = B'$  und  $C, C'$  liegen auf derselben Seite der Gerade durch  $A$  und  $B$ .

Angenommen,  $C \neq C'$ . Wir unterscheiden mehrere Fälle, je nachdem, wie  $C'$  zum Dreieck  $A, B, C$  liegt.

**1. Fall:**  $C'$  liegt im Inneren des Dreiecks  $A, B, C$ . Wir betrachten die Innenwinkel der Dreiecke  $A, C', C$ , sowie  $B, C', C$  und  $A, B, C'$ . Die ersten beiden sind gleichschenkelig. Addition der Winkel in  $A, B, C$  führt zu einem Widerspruch zum Satz von der Summe der Innenwinkel.

**2. Fall:**  $C'$  liegt auf der Kante  $[B, C]$ . Dann sind die Strecken  $[B, C]$  und  $[B, C']$  in derselben Halbgerade und kongruent, also gleich.

**3. Fall:** Die Kante  $[A, C']$  schneidet die Kante  $[B, C]$ . Wir betrachten das Viereck  $A, B, C, C'$  und die beiden Diagonalen. Vergleich der Innenwinkel führt zu einem Widerspruch.  $\square$

**Definition 6.14.** *Sei  $P \in X$  ein Punkt,  $[A, B]$  eine Strecke. Der Kreis mit Mittelpunkt  $P$  und Radius  $[A, B]$  ist die Menge der Punkte  $Q$ , so dass  $[P, Q]$  kongruent zu  $[A, B]$  ist.*

**Korollar 6.15.** *Eine Gerade und ein Kreis oder zwei Kreise schneiden sich in höchstens zwei Punkten.*

*Beweis:* Seien  $Q_1, Q_2, Q_3$  drei Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kreis mit Mittelpunkt  $P$ . Ohne Einschränkung liegt  $Q_2$  zwischen  $Q_1$  und  $Q_3$ . Wir betrachten die beiden gleichschenkligen Dreiecke mit Ecken  $P, Q_1, Q_2$  und  $P, Q_2, Q_3$ . Ein Vergleich der Winkelsummen führt zu einem Widerspruch.

Gegeben zwei Kreise mit Mittelpunkten  $P, P'$  und einen Schnittpunkt  $S$ , so ist das Dreieck  $P, P', S$  bis auf Kongruenz eindeutig. Durch Spiegeln an der Geraden durch die Mittelpunkte erhalten wir ein zweites kongruentes Dreieck, weitere Möglichkeiten gibt es nicht.  $\square$

# Kapitel 7

## Längen und Flächen

### Längen- und Flächenmessung

Bisher haben wir im Sinne Euklids Strecken verglichen, ihnen aber noch kein Längenmaß zugeordnet.

**Definition 7.1.** Sei  $(X, G, Z, K)$  eine euklidische Geometrie. Ein Längenmaß ist eine Zuordnung  $l$ , die jeder Strecke  $[A, B]$  eine reelle Zahl größer gleich Null zuordnet, so dass gilt:

- (i) Eine Strecke hat Länge 0 genau dann, wenn die Endpunkte übereinstimmen.
- (ii) Kongruente Strecken haben diesselbe Länge.
- (iii) Sei  $B$  zwischen  $A$  und  $C$ . Dann gilt

$$l([A, C]) = l([A, B]) + l([B, C]).$$

- (iv) Wenn  $[A, B] \subset [A', B']$ , dann ist  $l([A, B]) \leq l([A', B'])$ .

**Satz 7.2.** Ein Längenmaß existiert und ist eindeutig bis auf einen positiven reellen Faktor.

Mit anderen Worten: das Längenmaß ist eindeutig bestimmt durch die Länge einer einzigen Strecke  $[A, B]$  mit  $A \neq B$ .

*Beweis:* Zuerst zeigen wir die Existenz. Wir wählen eine Strecke  $[A, B]$  und setzen  $l([A, B]) = 1$ . Sei  $g$  die Gerade durch  $A, B$ . Für beliebige  $X, Y \in g$  finden wir  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit

$$\overrightarrow{XY} = \lambda \overrightarrow{AB}.$$

Wir setzen  $l([X, Y]) = |\lambda|$ . Dies ist wohldefiniert, denn  $\overrightarrow{YX} = -\overrightarrow{XY}$ . Alle Bedingungen sind (für Strecken in  $g$ ) erfüllt, insbesondere haben kongruente Strecken dieselbe Länge.

Jede beliebige Strecke ist kongruent zu einer Strecke in  $g$ , da die Kongruenzgruppe transitiv auf den Geraden operiert. Wir nutzen diese Kongruenz, um die Längenfunktion für beliebige Strecken zu definieren. Die Konstruktion ist wohldefiniert wegen (ii) in  $g$ .

Nun ist die Eindeutigkeit zu überprüfen. Die Teilungsregel setzt die Längenfunktion eindeutig auf alle Strecken fort mit  $\overrightarrow{XY} = \lambda \overrightarrow{AB}$  für  $\lambda \in \mathbb{Q}$ . Die Monotoniebedingung macht die Fortsetzung auf alle Strecken eindeutig  $\square$

Für die so definierten Länge gelten die Strahlensätze. Wir schauen uns nur einen Spezialfall an.

**Satz 7.3.** *Seien  $A, B, C$  und  $A', B', C'$  Dreiecke mit einem rechten Winkel bei  $C$  und  $C'$  und kongruenten Winkeln bei  $A$ . Dann gilt*

$$\frac{l([A, B])}{l([A', B'])} = \frac{l([A, C])}{l([A', C'])} = \frac{l([B, C])}{l([B', C'])}.$$

*Beweis:* Durch Anwenden von Kongruenzbewegungen ist ohne Einschränkung  $A = A'$  und  $B$  liegt auf der Halbgeraden mit Ecke  $A$  durch  $B'$ . Nach Voraussetzung sind dann  $C$  und  $C'$  die Fußpunkte der Lote durch  $B$  und  $B'$  auf die Gerade durch  $A$  und  $C$ .

In anderen Worten: Seien  $g$  und  $h$  sich schneidende Geraden mit Schnittpunkt  $A$ . Wir betrachten die Abbildung  $f: \vec{g} \rightarrow \vec{h}$ , die einen Vektor  $v$  auf den Richtungsvektor  $\overrightarrow{AX}$  abbildet, wobei  $X$  der Fußpunkt des Lotes auf  $h$  durch  $A + v$  ist. Es gilt

$$f(v) = \frac{1}{2}(v + \overrightarrow{s}_h(v))$$

wobei  $\overrightarrow{s}_h$  die lineare Abbildung ist, die von der Spiegelung an  $h$  induziert wird. Die Abbildung  $f$  ist linear.  $\square$

## Flächeninhalte

Derselbe Zugang funktioniert auch für das Flächenmaß von Rechtecken. Wir schreiben  $g_{AB}$  für die Gerade durch zwei verschiedene Punkte  $A$  und  $B$ .

**Definition 7.4.** (i) *Ein Parallelogramm ist ein Tupel von vier verschiedenen Ecken  $A, B, C, D$ , so dass die Gerade  $g_{AB}$  parallel ist zu  $g_{CD}$  und  $g_{AD}$  parallel zu  $g_{BC}$ . Wir schreiben  $\Pi = \{A, B; C, D\}$ .*

(ii) *Ein Rechteck ist ein Parallelogramm  $\{A, B; C, D\}$ , in dem  $g_{AB}$  orthogonal zu  $g_{AD}$  ist.*

(iii) *Zwei Parallelogramme heißen kongruent, wenn sie durch eine Kongruenzabbildung aufeinander abgebildet werden.*

(iv) *Ein Parallelogramm  $\Pi$  ist eine Scherung eines Parallelogramms  $\Pi'$ , wenn die beiden eine Seite gemeinsam haben und die Punkte der gegenüberliegenden Seite kollinear sind.*



Jedes Rechteck definiert 4 Innenwinkel, alles rechte. In einem Parallelogramm sind gegenüberliegende Innenwinkel kongruent (Stufen- und Gegenwinkelsatz).

**Definition 7.5.** Sei  $(X, G, Z, K)$  eine euklidische Geometrie. Ein Flächenmaß ist eine Zuordnung  $A$ , die jedem Parallelogramm eine reelle Zahl größer Null zuordnet, so dass gilt:

- (i) Kongruente Parallelogramme haben dieselbe Fläche.
- (ii) Geht ein Parallelogramm aus einem anderen durch eine Scherung hervor, so haben sie dieselbe Fläche.
- (iii) Sei  $\{A, B, C, D\}$  ein Rechteck,  $X \in [A, B]$  und  $Y \in [C, D]$  so, dass  $g_{XY}$  parallel zu  $g_{AD}$ . Dann ist

$$A(\{A, B; C, D\}) = A(\{A, X; C, Y\}) + A(\{X, B; Y, D\}).$$

- (iv) Wenn  $\{A, B; C, D\} \subset \{A', B'; C', D'\}$ , dann ist  $A(\{A, B; C, D\}) \leq A(\{A', B'; C', D'\})$ .

**Satz 7.6.** Ein Flächenmaß existiert und ist eindeutig bis auf einen positiven reellen Faktor.

*Beweis:* Wir betrachten zunächst nur Rechtecke. Wir setzen

$$A(\{A, B; C, D\}) = l([A, B]) \cdot l([A, D]).$$

Die Eigenschaften gelten, wegen der Eigenschaften für  $l$ .

Für die Eindeutigkeit beginnen wir mit einem Quadrat  $Q$  mit Seitenlänge 1 bezüglich eines Längenmaßes. Wenn  $A$  ein Flächenmaß ist mit  $A(Q) = \lambda > 0$ , so folgt aus den Unterteilungsregeln, dass jedes Rechteck mit Seitenlängen  $a$  und  $b$  in  $\mathbb{Q}$  die Fläche  $ab\lambda$  hat. Wegen der Monotoniebedingung folgt dieselbe Formel auch für  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Jedes Parallelogramm geht durch Scherung aus einem Rechteck hervor, daher ist auch die Fläche für Parallelogramme eindeutig bestimmt. In Formeln: Sei  $\Pi = \{A, B; C, D\}$  ein Parallelogramm,  $X$  der Fußpunkt des Lotes durch  $B$  auf die Gerade durch  $[C, D]$ . Dann setzen wir

$$A(\Pi) = l([X, B]) \cdot l([A, B]).$$

Zu zeigen ist die Wohldefiniertheit. Sei also  $Y$  der Fußpunkt des Lotes durch  $D$  auf die Gerade durch  $[B, C]$ . Zu zeigen ist

$$l([X, B]) \cdot l([A, B]) = l([Y, D]) \cdot l([C, B]).$$

Wir vergleichen die rechtwinkligen Dreiecke mit Ecken  $\{C, B, X\}$  und  $\{C, Y, D\}$ . Nach dem Gegenwinkelsatz haben sie denselben Winkel bei  $C$ . Nun wenden wir Satz 7.3 an.  $\square$

**Theorem 7.7** (Satz des Pythagoras). *In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächen der Quadrate über den Katheten gleich der Fläche des Quadrates über der Hypotenuse.*

*Beweis:* Sei  $A, B, C$  die Ecken mit dem rechten Winkel bei  $C$ . Sei  $X$  der Fußpunkt des Lotes durch  $C$  auf  $[A, B]$ . Durch wiederholtes Scheren bilden wir das Quadrat über  $[A, B]$  auf ein Rechteck mit Seiten  $[A, X]$  ab. Wir werden gleich zeigen, dass die zweite Seite kongruent ist zu  $[B, C]$ . Ebenso mit dem Quadrat über der zweiten Kathete. Zusammen bilden sie das Quadrat über  $[A, B]$ .

Nun zu dem Kongruenzargument. Sei  $Y$  Punkt auf der Geraden durch  $C$  und  $B$  so dass  $[Y, C]$  kongruent ist zu  $[A, C]$ . Er gehört zu dem Quadrat über der Kathete  $[A, C]$ . Sei  $Z$  der Punkt auf der Geraden durch  $C$  und  $X$ , so dass  $[C, Y]$  Seite des gescherten Parallelogramms ist. Wir vergleichen die Dreieck  $A, B, C$  und  $C, Y, Z$ . Beide sind rechtwinklig. Die Seite  $[A, C]$  ist kongruent zu  $[C, Y]$ . Man sieht leicht, dass auch die Winkel bei  $A$  in  $A, B, C$  und bei  $C$  in  $C, Y, Z$  kongruent sind. Nach dem Kongruenzsatz für Dreieck mit kongruenter Seite und anliegenden Winkeln sind die beiden Dreiecke kongruent, insbesondere auch  $[C, Z]$  zu  $[A, B]$ .  $\square$

**Korollar 7.8.** *Das Längemaß einer euklidischen Ebene stimmt mit dem Längemaß der kartesischen Ebene überein.*

*Beweis:* Wie in Kapitel 4 identifizieren wir die euklidische Ebene als Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation mit der kartesischen Ebene, so dass die Koordinatenachsen orthogonal sind und die Strecken  $[(0, 0), (0, 1)]$  und  $[(0, 0), (1, 0)]$  kongruent. Wir normieren das Längemaß so, dass diese Strecken die Länge 1 haben. Wegen der Kongruenzbedingung hat dann eine Strecke der Form  $[(x_0, y_0), (x_0, y_1)]$  die Länge  $y_1 - y_0$ , ebenso in die andere Richtung. Nach dem Satz von Pythagoras hat eine Strecke  $[(x_0, y_0), (x_1, y_1)]$  die Länge

$$\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}.$$

$\square$

Und endlich:

*Beweis von Theorem 4.1.* Alle Kongruenzabbildungen erhalten Orthogonalität und Längen. Sei also  $\sigma$  eine Kongruenzabbildung,  $\vec{\sigma}$  die induzierte lineare Abbildung auf  $\vec{X}$ . Durch Wahl eines orthonormalen Koordinatensystems identifizieren wir  $\vec{X}$  mit  $\mathbb{R}^2$ . Sei  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  die darstellende Matrix von  $\vec{\sigma}$ . Die Spaltenvektoren haben dieselbe Länge wie die Einheitsvektoren, da  $\vec{\sigma}$  Längen erhält. Sie stehen aufeinander senkrecht, da  $\vec{\sigma}$  Orthogonalität erhält. Mit anderen Worten: Die Matrix ist orthogonal im Sinne der Lineare Algebra. Die lineare Abbildung ist eine Kongruenzabbildung der kartesischen Ebene. Wir haben einen Isomorphismus von Inzidenzgeometrien mit Zwischenrelation und Kongruenzen.  $\square$

**Bemerkung.** Eigentlich will man nicht nur die Flächen von Parallelogrammen kennen, sondern auch von beliebigen Teilmengen von  $X$ . Diese Idee ist alles andere als harmlos. Will man ein paar vernünftige Eigenschaften wie Additivität und Monotonie, so ist es unmöglich jeder Menge einen Flächeninhalt zuzuweisen. Um der Frage umzugehen, entstand ein eigenes Gebiet der Mathematik, die *Maßtheorie*. Das geht also weit über unsere Möglichkeiten hinaus.

## Das Supremumsaxiom

Wofür wird das Supremumsaxiom gebraucht? Warum arbeiten wir mit  $\mathbb{R}$  statt einfach mit  $\mathbb{Q}$ ?

Für die Pythagoräer war es eine verstörende Einsicht, dass rationale Zahlen (wörtlich: Verhältnisse) nicht genügen. Nach dem Satz des Pythagoras ist die Länge der Hypotenuse eines rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreiecks mit Kathetenlänge 1 gleich  $\sqrt{2}$ . Bei Euklid wird bewiesen, dass diese Zahl *nicht* rational ist. Modern gesprochen: Wir brauchen einen total geordneten Körper, in dem alle Quadratwurzeln aus positiven Zahlen existieren. Dies wird von  $\mathbb{R}$  erfüllt, aber auch von vielen anderen, z.B. von der Menge der reellen algebraischen Zahlen. Ist ein solcher Körper *archimedisch* (d.h. für je zwei positive Zahlen  $x, y$  gibt es eine natürliche Zahl  $n$  mit  $nx > y$ ), so lässt er sich nach  $\mathbb{R}$  einbetten.

Euklid stellt in seiner Geometrie die Konstruktionen mit Zirkel und Lineal in den Vordergrund. Dafür genügt es, den kleinsten Körper zu betrachten, der durch Adjungieren von Quadratwurzeln entsteht. In der Vorlesung Algebra und Zahlentheorie zeigen wir, dass er echt kleiner ist als der Körper aller algebraischen Zahlen.

Die Anforderungen ändern sich, wenn es nicht um die Punkte der Ebene geht, sondern um den Wertebereich des Längenmaßes. Beschränkt man sich auf Parallelogramme oder allgemeiner auf triangulierbare Flächen, so liegen die Längen- und Flächenmaße im Grundkörper. Das ändert sich bereits beim Flächeninhalt von Kreisen. Bei der Frage nach der Quadratur des Kreises geht es gerade darum, die Fläche mit der Fläche eines Quadrates zu identifizieren. Das ist mit Zirkel und Lineal nicht möglich. Tatsächlich ist  $\pi$  sogar transzendent.

In unserer Entwicklung der Theorie wurde das Supremumsaxiom erstmals verwendet, um zu zeigen, dass halbebenenerhaltende Kongruenzen, die keine Verschiebungen sind, Spiegelungen sein müssen (Lemma 4.15). Auch das archimedische Axiom folgte. Man könne also Varianten des Axiomensystems benutzen, in der statt des Supremumsaxioms diese Eigenschaften direkt verlangt werden. Hilbert zeichnet unter diesen Ebenen die euklidische Ebene als die maximale aus. Sie lässt sich nicht mehr erweitern, ohne eines der Axiome zu verletzen.