Prof. Dr. A. Huber-Klawitter / Dr. L. Braun
Proseminar Graphentheorie — Sommer 2021
Programm

Literatur:

- Diestel, Reinhard. *Graph theory.* Fourth edition. Graduate Texts in Mathematics, 173. Springer, Heidelberg, 2010. ISBN: 978-3-642-14278-9 05-01
- West, Douglas. B. *Introduction to graph theory.* Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 1996. ISBN: 0-13-227828-6
- Bollobás, Béla. *Modern graph theory.* Graduate Texts in Mathematics, 184. Springer-Verlag, New York, 1998. ISBN: 0-387-98488-7

Die Referenzen in den Vortragsbeschreibungen beziehen sich auf das Buch von Diestel, soweit nicht anders angegeben. *Bitte beachten Sie die Auflage; die Nummerierungen in älteren Auflagen unterscheiden sich! Im Zweifel fragen Sie bitte nach.* Mit einem * gekennzeichnete Vorträge sind tendenziell etwas schwieriger. Mit ** gekennzeichnete Vorträge sind schwierig.

1. **Einführung in die Grundbegriffe.**

   - Grundbegriffe der Graphentheorie (Diestel, Chapter 1 bis einschliesslich 1.3 — oder — West, Section 1.1)
   - Machen Sie viele Beispiele
   - Illustrieren Sie, wo Graphen in praktischen Problemen auftauchen

   Etwas anschaulicher ist sicher die Referenz West, Section 1.1. Die Definition der Adjazenzmatrix dort können Sie ebenfalls präsentieren, müssen aber nicht. Die Einführung in Diestel hingegen ist etwas technisch. Sie sollten also im Vortrag *nicht* versuchen, sämliche dort eingeführten Begriffe der Reihe nach zu definieren. Die wichtigsten Konzepte, die aber unbedingt erklärt werden müssen, sind:

   - Die mathematische Modellierung eines Graphen G, die Mengen $V(G)$ und $E(G)$.
   - Der Begriff der Isomorphie und seine Bedeutung
   - der vollständige Graph K^n
   - Untergraphen (subgraphs) und induzierte Untergraphen (induced subgraphs).
   - Der Grad eines Knotens (vertex), minimaler, durchschnittlicher und maximaler Grad $\delta(G), d(G), \Delta(G)$
   - Pfade (paths) und Kreise (cycles)
   - Minimale und maximale Länge (girth, circumference) von Kreisen (mit Beispielen)
   - Entfernung (distance) und Durchmesser (diameter)

2. **Eulergraphen und Hamiltonkreise.**
   - Die Brücken von Königsberg — Eulers klassisches Problem (Chapter 1.8 “Euler tours”)
   - Theorem 1.8.1
   - Wenden Sie sich dem analogen Problem der Hamiltonkreise zu (Chapter 10). Erklären Sie an Beispielen, warum es sich um ein sehr viel schwierigeres Problem handelt.
   - Theorem 10.1.1 “Dirac’s theorem”
   - Proposition 10.1.2
   - Theorem 10.2.1 “Chvátal’s theorem”
3. **Zusammenhang und Mengers Theorem.**
   - Erklären Sie den Begriff des Zusammenhang eines Graphen, sowie die Größe $\kappa(G)$ (Chapter 1.4 “Connectivity”)
   - Proposition 1.4.2.
   - Geben Sie die äquivalente Definition des k-Zusammenhangs (Chapter 3 “Connectivity”, Introduction)
   - Diskutieren Sie 2- und 3-zusammenhängende Graphen (Section 3.1–3.2). Präsentieren Sie nur das, was Ihrer Meinung nach zum Verständnis des Zusammenhangs notwendig oder hilfreich ist und eher keine Beweise.
   - Präsentieren Sie einen (oder falls genug Zeit bleibt mehrere) der Beweise für den Satz von Mengers (Theorem 3.3.1). Sie dürfen stattdessen auch andere Beweise dieses Satzes vortragen (z.B. West, p. 167). Diskutieren Sie vor allem an Beispielen die Bedeutung dieses Satzes.
4. **Bipartite Graphen und das Heiratstheorem.**
   - Allgemeines und Definitionen (Section 1.6 “Bipartite graphs”)
   - Zuordnungen in bipartiten Graphen (Section 2.1 “Matching in bipartite graphs”)
   - Satz von König — Theorem 2.1.1
   - Satz von Hall (Heiratstheorem) — Theorem 2.1.2.
   - Präsentieren Sie einen oder mehrere der Beweise (je nach Zeit). Illustrieren Sie insbesondere die praktische Relevanz an Beispielen.
5. **Aufspannende Bäume.** (Vorkenntnisse in linearer Algebra hilfreich)
   - Definition von Bäumen und Wäldern, sowie aufspannenden Bäumen (West - Section 2.1)
   - Eigenschaften von Bäumen bis einschliesslich 2.1.4
   - Prüferkodes und Cayleys Formel (West - 2.2.1. + Example 2.2.2 + Theorem 2.2.3)
   - Anschließend wenden Sie sich dem Problem der Anzahl aufspannender Bäume in beliebigen Graphen zu (West - S.83 ff.)
   - Der Satz von Kirchhoff (West - 2.2.12)

6. **Elektrische Netze und das Problem von Moroń.** (physikalisches Interesse hilfreich.)
   - Beschreiben Sie das Problem und erinnern an die Kirchhoffschen Gesetze (Bolobás, Chapter II)
   - Theorem 1 und 2, Corollary 3 (Bolobás, II.1)
   - Präsentieren Sie kurz den Zusammenhang mit der Problem der "Quadratur des Quadrates" (Morońproblem, Bolobás, II.2) und Theorem 4
   - Erwähnen Sie auch Theorem 5, natürlich ohne Kommentar zum Beweis
7. **** Elektrische Netze und nochmals der Satz von Kirchhoff.** (gute Kenntnisse in linearer Algebra hilfreich)
   - In diesem Vortrag wird erneut der Satz von Kirchhoff bewiesen (siehe Vortrag über aufspannende Bäume) unter erneuter Beleuchtung des Problemes der elektrischen Netze mit Methoden der linearen Algebra. Zitat:

     > In fact it was Kirchhoff who first realized the applicability of matrix algebra to graph theory, exactly in connection with the electrical network problem.
   - Präsentieren Sie einen Überblick über Bolobás Section II.3, insbesondere Theorem 9–Corollary 13.
   - Präsentieren Sie nur soviele Beweise im Detail, wie zeitlich in den Vortrag passen. Machen Sie insbesondere deutlich, dass Theorem 12 einen alternativen Beweis des Satzes von Kirchhoff (siehe Vortrag "aufspannende Bäume") liefert (hier Corollary 13).
8. *** Ebene Graphen und Eulers Formel.**
   - Topologische Vorbereitungen (Section 4.1 "Topological prerequisites")
   - Ebene Graphen inkl. aller Lemmata und Propositionen (Section 4.2 "Plane graphs")
   - Theorem 4.2.9 "Euler's formula"
   - Erklären Sie auch Corollaries 4.2.10–11

   (eine Alternative ist z.B. West Section 6.1 — Sie dürfen auch dieser Referenz folgen)
9. **** Der Satz von Kuratowski über ebene Graphen.**
   - Erklären Sie die Begriffe aus Section 1.7 "Contraction and minors" bis einschliesslich Prop. 1.7.2
   - Etwas über 3-zusammenhängende Graphen, mindestens: Lemma 3.2.1
   - Erklären Sie Section 4.4 inkl. des Beweises von Theorem 4.4.6 "Kuratowski-Wager Theorem".

   (eine Alternative ist z.B. West Section 6.2 — Sie dürfen auch dieser Referenz folgen — möglicherweise etwas einfacher)
10. **Färbungen ebener Graphen.**
    - Erklären Sie unterschiedliche praktische Bedeutungen des Graphen-Färbeproblems (siehe z.B. Einleitung zu Chapter 5 "Colouring").
    - Erklären Sie die fundamentalen Grössen $\chi(G)$, $\chi'(G)$.

- Präsentieren Sie den Beweis des 5-Farbensatzes (Proposition 5.1.2 “Five Colour Theorem” — eine Alternative ist z.B. West 6.3.1). (Sie benötigen Begriffe aus dem Vortrag “ebene Graphen” — sprechen Sie sich mit der/dem Vortragenden ab).
- Es wäre schön, etwas über die Geschichte des und Ansätze zum 4-Farbenproblem zu erfahren (z.B. Notes auf Seite 136–138, oder West S.258 ff.).

Folgendes ist ein Vorschlag, für den Fall, dass Sie noch genügend Zeit haben:

- Diskutieren Sie das Listenfärbeproblem 5.4 “List colouring”, warum $ch(G)$ im allgemeinen von $\chi(G)$ abweicht und dass man vermutet, dass $ch'(G) = \chi'(G)$
- Präsentieren Sie den Beweis des Satzes von Thomassen (5.4.2) und damit einen alternativen Beweis zum 5-Farbensatz.

11. **Graphenalgorithmen.** (Interesse an Informatik hilfreich)

    - Stellen Sie Kruskals Algorithmus vor und beweisen Sie seine Korrektheit (West 2.3.1–2.3.3)
    - Stellen Sie Dijkstras Algorithmus vor und beweisen Sie seine Korrektheit (West 2.3.5–2.3.7)
    - Erklären Sie binäre Bäume.
    - Stellen Sie Huffman-Kodierung und Huffmans Algorithmus vor (West 2.3.13)

    Es wäre nett, zu allen Algorithmen interessante praxisrelevante Probleme als Beispiel anzugeben.

12. **Zufallsgraphen und die probabilistische Methode.** (Interesse an Stochastik hilfreich)

    - Beweisen Sie Theorem 9.1.1 “Ramsey’s Theorem” und geben Sie die Definition der Ramsey-Zahlen (Section 9.1).
    - Präsentieren Sie Section 11.1 “The notion of a random graph” bis einschliesslich 11.1.4+Beweis. Sie müssen evtl. einige Grundbegriffe der Stochastik (wie Wahrscheinlichkeitsraum und -maß(hier ist aber alles diskret!), Ereignisse, Unabhängigkeit von Ereignissen etc.) erklären und motivieren. Sie können hierfür ein beliebiges Stochastikbuch heranziehen.

    Dieser Vortrag hängt eng mit dem folgenden zusammen, sprechen Sie sich mit der/dem Vortragenden ab. Sie können auch Material zwischen den Vorträgen verschieben.

13. **Der Satz von Erdős.** (Interesse an Stochastik hilfreich)

    - Präsentieren Sie 11.1. “The notion of a random graph” ab Seite 298, also insbesondere Lemma 11.1.5.
    - Präsentieren Sie Section 11.2 “The probabilistic method”, inkl. des Satzes von Erdős (11.2.2).

    Dieser Vortrag hängt eng mit dem vorherigen zusammen, sprechen Sie sich mit der/dem Vortragenden ab. Sie können auch Material zwischen den Vorträgen verschieben.