Aufgabe 10.1. Wir betrachten die kartesische Ebene $X = \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie alle Kongruenzen $s\colon X \to X$, für die $s^2 = \mathrm{id}$ gilt.

(4 Punkte)

Aufgabe 10.2. Sei (X, G, Z, K) eine fast-euklidische Geometrie und $x \neq y$ zwei Punkte in X. Beweisen Sie mithilfe der Axiome und Aussagen aus der Vorlesung die Existenz einer Mittelsenkrechten zu x und y.

(3 Punkte)

Aufgabe 10.3. Betrachten Sie folgende Version des *Paradoxons von Achilles und der Schildkröte* (*Zenon v. Elea*, 5. Jhdt. v. Chr.). Sei (X, G, Z, K) eine fast-euklidische Geometrie und $g \in G$ eine Gerade. Seien $A_0 \neq S_0$ zwei Punkte auf g, auf denen Achilles und die Schildkröte zu Anfang stehen. Wir wählen eine verträgliche Anordnung, sodass $A_0 < S_0$. Die Schildkröte ist halb so schnell wie Achilles. Wir betrachten zwei Folgen von Punkten A_n und S_n, die wir rekursiv definieren wie folgt:

$$A_n := \tau_{n-1}^2(A_{n-1}), \qquad S_n := \tau_{n-1}(S_{n-1}),$$

wobei τ_{n-1}^2 die Verschiebung entlang g ist, die A_{n-1} auf S_{n-1} abbildet.

Zeigen Sie, dass $\sup A_n = \sup S_n$ und drücken Sie dieses gemeinsame Supremum durch A_0, S_0 und Verschiebungen entlang g aus.

(6 Punkte)

Aufgabe 10.4. Sei $X = \mathbb{R}^2$ die kartesische Ebene und sei $\tau_{(a,b)}$ die Verschiebung $(x, y) \mapsto (x + a, y + b)$ für $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Laut Satz 4.16 der Vorlesung ist die Verknüpfung $\tau_{(-1,2)} \circ \tau_{(3,0)}$ wieder eine Verschiebung (und sie ist nicht trivial). Finden Sie die Gerade g, so dass diese Verknüpfung eine Verschiebung entlang g ist.

(4 Punkte)

Bonusaufgabe 10.5. Sei (X, G, Z, K) eine Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation und Kongruenzabbildungen. Sei $g \in G$ eine Gerade und $h \in G$ eine Gerade, so dass $g \perp h$. Sei $x \in g \cap h$. Zeigen Sie, dass die Untergruppe der Kongruenzabbildungen ϕ, so dass $\phi(g \cup h) = g \cup h$ und $\phi(x) = x$, isomorph zur Diedergruppe der Ordnung 8 ist.

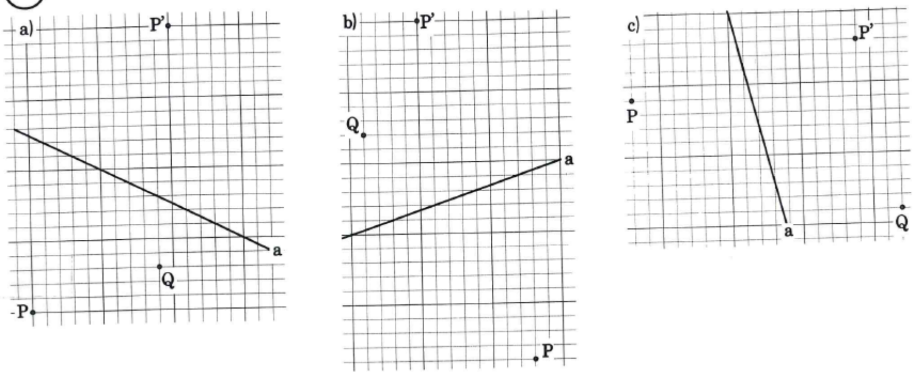
(4 Bonuspunkte)

(Bitte wenden)

Aufgabe 10.6 (Aufgabe mit Schulbezug)**.** Bearbeiten Sie die Schulbuchaufgabe (aus: Barth et al. (1985): Anschauliche Geometrie 1. München: Ehrenwirth. S. 110). Begründen Sie außerdem kurz die Konstruktionen mit den Eigenschaften der Spiegelung.

8. Gegeben sind die Achse a und die Punkte P, P′ und Q, siehe Aufgabenbild.
Konstruiere allein mit dem Lineal den Spiegelpunkt Q′.

8



(3 Bonuspunkte)