Elementargeometrie SS22
Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter — Übungsblatt 2
StR Dr. Katharina Böcherer-Linder
M.Sc. Pedro Núñez — Abgabe: 13.05.2022

Aufgabe 2.1. Sei $\mathbb{R}$ der Körper der reellen Zahlen und

$$\mathrm{SO}(2) := \{M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1 \text{ und } \forall u, v \in \mathbb{R}^2 : \langle Mu, Mv\rangle = \langle u, v\rangle\}$$

wobei $\langle *, *\rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ bezeichnet, also $\langle (u_1, u_2), (v_1, v_2)\rangle = u_1v_1 + u_2v_2$ für alle $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Zeigen Sie, dass durch $(M, v) \mapsto Mv$ eine Gruppenoperation von $\mathrm{SO}(2)$ auf $\mathbb{R}^2$ definiert wird.

(b) Bestimmen Sie die Bahnen und die Standgruppen dieser Operation.

(4 Punkte)

Aufgabe 2.2. Sei k ein Körper, V ein 4-dimensionaler Vektorraum über k, und $\mathbb{P}(V)$ der projektive (3-dimensionale) Raum über V. Untersuchen Sie das Schnittverhalten von Geraden und Ebenen (also 1- und 2-dimensionalen projektiven Unterräumen) in $\mathbb{P}(V)$ folgendermaßen:

(a) Seien $g_1, g_2 \subseteq \mathbb{P}(V)$ zwei verschiedene projektive Geraden. Zeigen Sie, dass sich g_1 und g_2 in $\mathbb{P}(V)$ in einem Punkt schneiden oder disjunkt sind. Geben sie jeweils das entsprechende Schnittverhalten der zugehörigen Untervektorräume von V an.

(b) Seien $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{P}(V)$ zwei verschiedene projektive Ebenen. Zeigen Sie, dass sich E_1 und E_2 in einer projektiven Geraden schneiden.

(c) Sei nun $E \subseteq \mathbb{P}(V)$ eine projektive Ebene und $g \subseteq \mathbb{P}(V)$ eine projektive Gerade. Zeigen Sie, dass sich g und E entweder in einem Punkt schneiden oder $g \subseteq E$.

(6 Punkte)

Aufgabe 2.3. Sei $\mathbb{H}^2$ die hyperbolische Ebene.

(a) Gegeben seien die drei hyperbolischen Punkte $(0, 3), (0, 1), (2, 2) \in \mathbb{H}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$. Zeichnen Sie das hyperbolische Dreieck mit den obigen Eckpunkten. Dafür dürfen Sie nur Zirkel und Lineal benutzen. Beweisen Sie die Korrektheit mithilfe der geometrischen Konstruktion.

(b) Geben Sie eine naive Idee einer Definition von Schnittwinkeln von hyperbolischen Geraden und bestimmen Sie damit die Winkelsumme in dem Dreieck aus Teil (a).

(6 Punkte)

(Bitte wenden)

Aufgabe 2.4. Wir betrachten $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ mit homogenen Koordinaten $[x_0 : x_1 : x_2]$.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi\colon (x, y) \mapsto [1 : x : y]$ eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}^2$ und der Teilmenge $\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid x_0 \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ definiert.

(b) Sei $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$. Zeigen Sie, dass es eine eindeutig bestimmte projektive Gerade $\overline{L} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ gibt, so dass $\varphi(L) \subseteq \overline{L}$. Was ist $\overline{L} \setminus \varphi(L)$?

(c) Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ das regelmäßige Viereck mit Ecken $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$, wobei $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 2)$ und $P_3 = (2, -1)$. Es sei für jede $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ mit $i \neq j$ die Gerade $L_{ij} = \overline{P_i P_j}$. Man rechne die Koordinaten in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ von den Schnittpunken $L_{14} \cap L_{23}$ und $L_{12} \cap L_{34}$.

(6 Punkte)

Bonusaufgabe 2.5. Wir haben in Satz 1.15 im Skript gesehen, dass je zwei Geraden in der projektiven Ebene genau einen Schnittpunkt haben. Wir können so eine *axiomatische projektive Ebene* als eine Inzidenzgeometrie (X, G) mit folgenden Eigenschaften definieren: Es gibt ein Dreieck, jede Gerade hat mindestens 3 Punkte und je zwei Geraden haben einen Schnittpunkt.

(a) Zeigen Sie, dass jede axiomatische projektive Ebene mindestens 7 Punkte hat.

(b) Finden Sie eine axiomatische projektive Ebene mit 7 Punkten.

(4 Bonuspunkte)

(Aufgabe mit Schulbezug auf der nächsten Seite.)

Aufgabe 2.6 (Aufgabe mit Schulbezug)**.** Als Projektion des 3-dimensionalen Raumes auf eine 2-dimensionale Ebene lernen die Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht die Parallelprojektion und im Kunstunterricht die Zentralperspektive kennen. Von Albrecht Dürer stammen die folgenden Holzschnitte mit dem Titel 'Perspektivmaschine' (1525).

1. Erläutern Sie jeweils die beiden dargestellten Verfahren.
2. Stellen Sie eine Beziehung her zwischen den beiden Verfahren von Albrecht Dürer und der Definition des projektiven Raumes aus der Vorlesung.

(4 Bonuspunkte)