Aufgabe 3.1. Beweisen Sie die Bemerkung nach Satz 1.19: Sei S^2 die 2-Sphäre und $\sim$ die Äquivalenzrelation gegeben durch $x \sim x' \Leftrightarrow x = \pm x'$. Dann gibt es eine Bijektion zwischen $S^2/\sim$ und $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, die zusätzlich die Menge der Großkreise bijektiv auf die Menge der projektiven Geraden abbildet.

(3 Punkte)

Aufgabe 3.2. Seien $P_i = (i, 1) \in \mathbb{H}^2$ für $i \in \{-1, 0, 1\}$ und sei $Q = (0, \sqrt{2}) \in \mathbb{H}^2$.

(a) Zeichnen Sie alle Punkte in $\mathbb{H}^2$.

(b) Ist $\{P_{-1}, P_0, P_1\}$ ein Dreieck in $\mathbb{H}^2$ oder liegen die Punkte auf einer Gerade in $\mathbb{H}^2$? Zeichnen Sie die Geraden durch die Punkte ein.

(c) Ist $\{P_{-1}, Q, P_1\}$ ein Dreieck in $\mathbb{H}^2$ oder liegen die Punkte auf einer Gerade in $\mathbb{H}^2$? Zeichnen Sie die Geraden durch die Punkte ein.

(4 Punkte)

Aufgabe 3.3. Seien $P_1 = [1 : 1 : -1]$, $P_2 = [-1 : 0 : 1]$, $P_3 = [-2 : 3 : 0]$ und $P_4 = [0 : 5 : -2]$ vier Punkte in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

(a) Ist $\{P_1, P_3, P_4\}$ ein Dreieck in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ oder liegen die Punkte auf einer Gearde in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$? Zeichnen Sie die Geraden durch die Punkte als affine Geraden in der affinen Ebene $\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid x_1 \neq 0\}$ ein.

(b) Ist $\{P_2, P_3, P_4\}$ ein Dreieck in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ oder liegen die Punkte auf einer Gerade in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$? Zeichnen Sie die Geraden durch die Punkte als Nullpunktsebenen in $\mathbb{R}^3$ ein.

(4 Punkte)

Aufgabe 3.4. Sei k ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \{0, \dots, n\}$. Seien $\mathbb{P}^n(k)$ der projektive Raum über k, $\Pi_1 \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ ein projektiver Teilraum der Dimension m und $\Pi_2 \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ ein projektiver Teilraum der Dimension $n - m$. Dann ist $\Pi_1 \cap \Pi_2 \neq \varnothing$.

(4 Punkte)

(Bitte wenden)

Bonusaufgabe 3.5. Sei Y die Menge der affinen Geraden in $\mathbb{R}^2$. Wir definieren die Äquivalenzrelation $\sim$ auf Y durch $g \sim g'$ genau dann, wenn $g||g'$ (parallel hier im Sinne der affinen Geometrie). Sei $X := \mathbb{R}^2 \cup (Y/\sim)$ und sei

$$G := \{g \cup \{[g]\} \mid g \in Y\} \cup \{Y/\sim\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass (X, G) eine Inzidenzgeometrie ist.

(b) Zeigen Sie, dass (X, G) isomorph zu $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ als Inzidenzgeometrie ist.

(4 Bonuspunkte)

Aufgabe 3.6 (Aufgabe mit Schulbezug)**.** Auf ILIAS finden Sie das Schülerarbeitsblatt „Lass Krummes mal Gerade sein", das in schülergerechter Weise in die Idee der nicht-euklidischen Geometrie einführt (Quelle: Zeitschrift *mathematik lehren*, Heft 200).

(a) Beantworten Sie alle Fragen des Schülerarbeitsblattes. Sie dürfen anschaulich und mit kleinen Skizzen argumentieren. Bei Nummer 27 können Sie bei der Frage, wie man zu zwei Punkten eine passende „Gerade" findet, eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal angeben.

(3 Bonuspunkte)

(b) Vergleichen Sie nun Nummer 27 mit der Vorlesung: Welches sind die entsprechenden Sätze? Wie wird hier in den Beweisen die Suche nach passenden „Geraden" angegangen?

(1 Bonuspunkt)