Elementargeometrie SS22
Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter — Übungsblatt 5
StR Dr. Katharina Böcherer-Linder
M.Sc. Pedro Núñez — Abgabe: 03.06.2022

Aufgabe 5.1. Sei $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ die reelle projektive Ebene mit homogenen Koordinaten $[x_0 : x_1 : x_2]$. Sei $P = [1 : 2 : 3] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ und sei $L = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid 4x_0 + 5x_1 + 6x_2 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Für $P \neq Q \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, sei $Q' \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ der Schnittpunkt $\overline{PQ} \cap L$. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \pi\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus \{P\} &\to L =: \mathbb{P}(V) \\ Q &\mapsto Q' \end{aligned}$$

Finden Sie den Untervektorraum $V \subseteq \mathbb{R}^3$ und die zugehörige lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to V$ und überprüfen Sie, dass $\mathbb{P}(\mathrm{Ker}(f)) = \{P\}$.

(4 Punkte)

Aufgabe 5.2. Beweisen Sie die Behauptung im Beispiel auf Seite 20 des Skripts: Sei k ein Körper und $n \geq 2$. Wir definieren die *projektive lineare Gruppe vom Rang* n als Quotienten $\mathrm{PGl}_n(k) := \mathrm{Gl}_n(k)/\sim$ der allgemeinen linearen Gruppe nach der Äquivalenzrelation

$$A \sim B \Leftrightarrow A = \lambda B \text{ für ein } \lambda \in k^*.$$

Zeigen Sie, dass die Gruppe der Projektivitäten von $\mathbb{P}^{n-1}(k)$ genau die projektive lineare Gruppe vom Rang n ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 5.3. Wir haben in der Vorlesung gesehen, wie wir affine Bewegungen von k^2 als lineare Abbildungen des k^3 ansehen können. Nach Satz 2.9 ist die Abbildung

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathrm{Aff}(k^2) & \to & \mathrm{Gl}_3(k) \\ \tau_v \phi_{(0,0),M} & \mapsto & \begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus.

1. Zeigen Sie, dass φ sogar einen injektiven Gruppenhomorphismus

$$\psi\colon \mathrm{Aff}(k^2) \to \mathrm{PGl}_3(k)$$

   induziert.

2. Wir identifizieren $\mathrm{Aff}(k^2)$ mit dem Bild unter ψ. Sei $g := \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2(k) \mid z = 0\}$ die *unendlich ferne Gerade*. Zeigen Sie, dass gilt

$$\mathrm{Aff}(k^2) = \{A \in \mathrm{PGl}_3(k) \mid Ag \subseteq g\}.$$

(6 Punkte)

3. (Bonusaufgabe) Bestimmen Sie die Untergruppe von $\mathrm{Aff}(k^2)$, die die Gerade g sogar *punktweise* fixiert. Welchen affinen Bewegungen des k^2 entspricht diese Untergruppe?

(2 Bonuspunkte)

Aufgabe 5.4. Sei $k = \mathbb{C}$. Wir betrachten die Möbiustransformation

$$\phi\colon x \mapsto \frac{-3x+3}{2x+3i+5}.$$

Stellen Sie ϕ als Hintereinanderausführung von Möbiustransformationen der Form $x \mapsto 1/x$, $x \mapsto \alpha x$, $x \mapsto x + \beta$ mit geeigneten $\alpha \in k^*$, $\beta \in k$ dar. Berechnen Sie das Bild von $-\frac{6+3i}{4}$ unter ϕ und skizzieren Sie, wie es durch die obigen 'elementaren' Möbiustransformationen - also Invertierung, Streckung und Verschiebung - aus $-\frac{6+3i}{4}$ hervorgeht.

(4 Punkte)

Aufgabe 5.5 (Aufgabe mit Schulbezug)**.** Lösen Sie folgende Aufgabe aus dem Schulbuch „Mathematik“ (Gymnasiale Oberstufe, Leistungsfach, Rheinland-Pfalz, Band 2) herausgegeben von A. Bigalke und N. Köhler (erschienen 2017 bei Cornelsen):

19. Bildpunkte geometrisch bestimmen

Eine affine Abbildung bildet $\mathrm{P}(0|0)$ auf $\mathrm{P}'(1|-2)$, $\mathrm{Q}(1|0)$ auf $\mathrm{Q}'(2|2)$ und $\mathrm{R}(0|1)$ auf $\mathrm{R}'(-1|0)$ ab.

a) Zeichnen Sie das Gitter, auf das das kartesische Koordinatensystem abgebildet wird.
b) Ermitteln Sie zeichnerisch die Bildpunkte von $\mathrm{A}(-1|-2)$, $\mathrm{B}(1|-2)$, $\mathrm{C}(2|1)$, $\mathrm{D}(-3|2)$.
c) Wie lauten die Abbildungsgleichungen der affinen Abbildung?
Geben Sie auch die Abbildungsmatrix A und den Verschiebungsvektor $\vec{\mathrm{v}}$ an.

(3 Bonuspunkte)