Aufgabe 7.1. Sei (X, G, Z) eine Inzidenzgeometrie mit Dreieck und Zwischenrelation. Seien $x, y, z, w \in X$ vier unterschiedliche kollineare Punkte. Zeigen Sie:

(a) Wenn $y \in [x, z]$ und $z \in [y, w]$, dann $y \in [x, w]$ und $z \in [x, w]$.

(b) Wenn $y \in [x, w]$ und $z \in [y, w]$, dann $y \in [x, z]$ und $z \in [x, w]$.

(4 Punkte)

Aufgabe 7.2. Sei (X, G, Z) eine Inzidenzgeometrie mit Dreieck und Zwischenrelation. Seien $x, y, a, b \in X$, so dass $[x, y] = [a, b]$. Zeigen Sie, dass $\{x, y\} = \{a, b\}$ gilt.

(4 Punkte)

Aufgabe 7.3. Sei (X, G, Z) eine Inzidenzgeometrie mit Dreieck und Zwischenrelation. Seien $x, y, z, w \in X$, so dass es keine drei kollinearen Punkte in der Menge $\{x, y, z, w\}$ gibt, und so dass die einzige Schnittpunkte der Strecken $[x, y]$, $[y, z]$, $[z, w]$ und $[w, x]$ die Endpunkte sind.

Zeigen Sie: Wenn $[x, z] \cap [y, w] \neq \varnothing$, dann sind z und w auf der selben Seite der Geraden g durch x und y. Fertigen Sie eine Skizze an.

(4 Punkte)

Aufgabe 7.4. Wir betrachten den Körper $\mathbb{R}$ und den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ als affinen Raum über sich selbst. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und die Gerade $g \subseteq \mathbb{R}^2$ definiert durch $ax + by + c = 0$. Zeigen Sie, dass die zwei Seiten von g (im Sinne von Definition 3.4 und bis auf Vertauschung) gegeben sind durch

$$S_1 := \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c > 0\} \quad \text{und} \quad S_2 := \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c < 0\}.$$

(4 Punkte)

(Bitte wenden)

Bonusaufgabe 7.5. Sei k der Körper der rationalen Funktionen über $\mathbb{R}$. Die Elemente von k sind also Brüche $\frac{p(x)}{q(x)}$, wobei $p, q \in \mathbb{R}[x]$ Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$ sind, und $q \neq 0$ gilt. Insbesondere identifizieren wir, wie bei der Konstruktion der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ aus den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, zwei Brüche $\frac{p(x)}{q(x)}$ und $\frac{r(x)}{s(x)}$, falls $p(x) \cdot s(x) = q(x) \cdot r(x)$.

(a) Wir definieren nun eine Relation

$$\frac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_0} < 0 :\Leftrightarrow \frac{a_n}{b_m} < 0, \quad f_1 \leq f_2 :\Leftrightarrow f_1 - f_2 < 0 \vee f_1 = f_2.$$

Zeigen Sie, dass $\leq$ auf k eine totale Ordnung definiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Identität $f(x) = x$ bezgl. der Ordnung $\leq$ größer ist als jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N} \subseteq k$.

Bemerkung: Körper mit dieser Eigenschaft werden nicht archimedische Körper *genannt, da sie das archimedische Axiom verletzen.*

(4 Bonuspunkte)