Elementargeometrie SS22
Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter — Übungsblatt 8
StR Dr. Katharina Böcherer-Linder
M.Sc. Pedro Núñez — Abgabe: 01.07.2022

Aufgabe 8.1. Wir identifizieren die kartesische Ebene $\mathbb{R}^2$ mit den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mittels $(x,y)^t \mapsto x+iy$. Zeigen Sie, dass unter dieser Identifikation die Kongruenzabbildungen der kartesischen Ebene gerade den Abbildungen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Form $z \mapsto az+b$ und $z \mapsto a\overline{z}+b$ mit $a,b \in \mathbb{C}$ und $|a|=1$ entsprechen.

(4 Punkte)

Aufgabe 8.2. Wir betrachten die kartesische Ebene $\mathbb{R}^2$ und die Geraden $g_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2y = x+2\}$ und $g_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -3x+5\}$. Wir betrachten weiter die Punkte $P_1 = (0,1) \in g_1$ und $P_2 = (1,2) \in g_2$.

(a) Bestimmen Sie alle Kongruenzabbildungen, die P_1 auf P_2 abbilden.

(b) Bestimmen Sie alle Kongruenzabbildungen, die P_1 auf P_2 und g_1 auf g_2 abbilden.

(c) Bestimmen Sie alle Kongruenzabbildungen, die P_1 auf P_2 und g_1 auf g_2 abbilden, und die $g_1 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$ auf $g_2 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1\}$ abbilden.

(6 Punkte)

Aufgabe 8.3. Sei A eine affine Ebene über $\mathbb{R}$. Sei $K\colon A \to A$ eine Kongruenzabbildung. Zeigen Sie, dass K ein Produkt von höchstens drei Spiegelungen an (möglicherweise verschiedenen) Geraden $g \subseteq A$ ist.

Bemerkung: Die Aussage gilt allgemeiner: ist $K\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Kongruenzabbildung, so ist K Produkt von höchstens $n+1$ Spiegelungen.

(4 Punkte)

Aufgabe 8.4. Seien A, A' affine Ebenen über $\mathbb{R}$ zu den Vektorräumen V, V', jeweils mit Skalarprodukt $\langle \cdot,\cdot \rangle_V$ bzw. $\langle \cdot,\cdot \rangle_{V'}$. Sei (ϕ, f) eine affine Abbildung von A nach A', sodass die induzierte lineare Abbildung $f\colon V \to V'$ ein $\mathbb{R}^*$-Vielfaches einer orthogonalen Abbildung ist. Zeigen Sie, dass $\phi\colon A \to A'$ ein Isomorphismus von Inzidenzgeometrien mit Zwischenrelation und Kongruenzen ist.

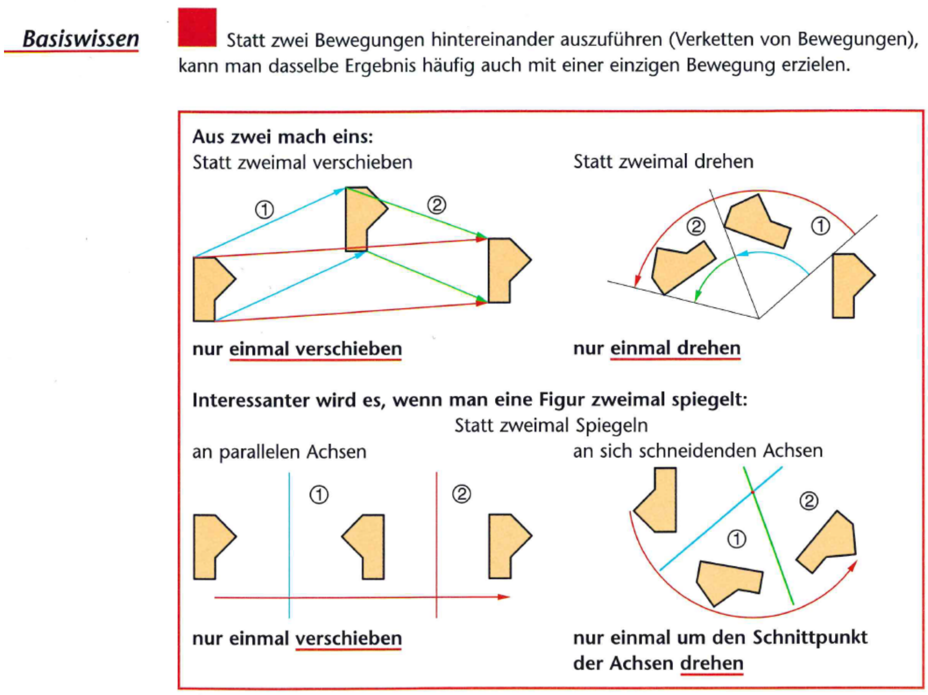
(4 Punkte)

(Bitte wenden)

Bonusaufgabe 8.5. Zeigen Sie die Umkehrung der Aussage aus Aufgabe 8.4: Seien A, A' affine Ebenen über $\mathbb{R}$ zu den Vektorräumen V, V', jeweils mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ bzw. $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V'}$. Sei (ϕ, f) eine affine Abbildung von A nach A', die ein Isomorphismus von Inzidenzgeometrien mit Zwischenrelation und Kongruenzen ist. Zeigen Sie, dass die zugehörige lineare Abbildung $f \colon V \to V'$ ein $\mathbb{R}^*$-Vielfaches einer orthogonalen Abbildung ist.

(4 Bonuspunkte)

Aufgabe 8.6 (Aufgabe mit Schulbezug)**.** Folgender „rote Kasten“ ist dem Schulbuch *Neue Wege*, Klasse 6 (Schroedel, 2001), S. 148 entnommen:



Zeigen Sie, dass allgemein gilt:

(1) Eine Zweifachspiegelung an parallelen Achsen mit dem Abstand d ist gleichwertig mit einer Verschiebung um $2d$ senkrecht zu den Achsen.

(2) Eine Zweifachspiegelung an Achsen, die sich in M unter dem α Winkel schneiden, ist gleichwertig mit einer Drehung um M mit dem Drehwinkel $\varphi = 2\alpha$.

Hinweis: Sie dürfen „schulmäßig“ begründen, d.h. die verschiedenen Fälle skizzieren und mit den auftretenden Abständen bzw. Winkeln argumentieren.

(4 Bonuspunkte)