Übungen zur Vorlesung
“Algebraische Zahlentheorie”
WS 2009/10 Blatt 1

Ausgabe: 22.10.2009, **Abgabe:** 29.10.2009

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws09/azt.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 1.1: Sei $\rho = e^{2\pi i/3}$ eine primitive dritte Einheitswurzel. Zeigen Sie: Der Ring

$$\mathbb{Z}[\rho] = \{a + b\rho \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

ist ein Hauptidealring. Betrachten Sie dazu die Abbildung $N : \mathbb{Q}(\rho)\backslash\{0\} \to \mathbb{Q}$ mit $N(x) = x\overline{x}$ und gehen Sie wie folgt vor:

(a) Für alle $a, b \in \mathbb{Z}[\rho] \setminus \{0\}$ ist $N(ab) \geq N(a)$.

(b) Für alle $a, b \in \mathbb{Z}[\rho]$ mit $a \neq 0$ existieren $q, r \in \mathbb{Z}[\rho]$, so dass $b = aq + r$ und $N(r) < N(a)$ gelten. (Division mit Rest)

(c) Folgern Sie daraus die Behauptung.

(6 Punkte)

Aufgabe 1.2: Sei $\rho = e^{2\pi i/3}$ eine primitive dritte Einheitswurzel. Zeigen Sie: Der Ring

$$\mathbb{Z}[\rho] = \{a + b\rho \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

ist der Ganzheitsring des Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\rho)$.

(4 Punkte)

Aufgabe 1.3: Sind die folgenden Zahlen ganz über $\mathbb{Z}$? (Dabei ist ρ wieder eine primitive dritte Einheitswurzel.)

$$\frac{3 + 2\rho}{1 + \rho}, \qquad \frac{\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{9}}{3}$$

Ist die folgende Funktion ganz über $\mathbb{F}_p[t]$?

$$\frac{1 + \sqrt{t+1}}{2 - \sqrt{t+1}}$$

(6 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe Kommutative Algebra 1.4: Sei k ein Körper, und $F \in k[X,Y]$ ein irreduzibles Polynom. Wir nehmen an, daß die Variable Y in F vorkommt. Bezeichne $V(F)$ die zugehörige algebraische Kurve, und $k(V)$ ihren Funktionenkörper. Zeigen Sie, daß gilt

$$k(V) = k(X)[Y]/(F).$$

Zeigen Sie außerdem, daß $k(V)$ eine endliche Erweiterung von $k(X)$ ist. Dabei dürfen Sie voraussetzen, daß für den Funktionenring gilt

$$k[V] = k[X,Y]/(F).$$

(4 Punkte)

Stichworte Kommutative Algebra: Ringe, Ideale, Nullteiler, Primideale, Quotientenkörper, Bsp. $k(t)$

(bitte wenden)

Anwesenheitsaufgaben, Mo 26.10.09

Aufgabe 1.5: Sei k ein Körper, $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$ ein irreduzibles Polynom. Zeigen Sie, daß $k[X_1, \ldots, X_n]/(F)$ ein nullteilerfreier Ring ist.

Aufgabe 1.6: Sind die folgenden Zahlen ganz über $\mathbb{Z}$?

$$\frac{5+3\sqrt{-7}}{2+1\sqrt{-7}}, \qquad \frac{3+2\sqrt{6}}{1-\sqrt{6}}, \qquad \frac{\sqrt[3]{2}}{3}$$

Gelegenheit zur Klärung der Begriffe aus der kommutativen Algebra, Wiederholgung Rechnen mit Restklassen, chinesischer Restsatz