Übungen zur Vorlesung
"Algebraische Zahlentheorie"
WS 2009/10 Blatt 10

Ausgabe: 07.01.2010, **Abgabe:** 14.01.2010

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws09/azt.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 10.1: Sei k ein Körper. Zeigen Sie, dass der Potenzreihenring $k[[t]]$ ein diskreter Bewertungsring ist. Beschreiben Sie den Quotientenkörper und dessen Bewertung.

(4 Punkte)

Aufgabe 10.2: In der Vorlesung wurde $\mathbb{Q}_p$ definiert als Komplettierung von $\mathbb{Q}$ bezüglich des Absolutbetrages $|\cdot|_p$. Zeigen Sie, dass die Menge der Potenzreihen

$$\Big\{ \sum_{i=-m}^{\infty} a_i p^i \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_i < p \Big\}$$

mit $\mathbb{Q}_p$ identifiziert werden kann. Geben Sie die p-adische Reihendarstellung für -1 an.

(4 Punkte)

Aufgabe 10.3:

1. Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^2 = 2$ in $\mathbb{Z}_7$ eine Lösung hat, indem Sie induktiv zeigen, dass Lösungen in $\mathbb{Z}/(7^{n+1})$ existieren.
2. Geben Sie die ersten 3 Terme in der 7-adischen Entwicklung der beiden Lösungen an.

(4 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe Kommutative Algebra 10.4: Für eine Sequenz von R-Moduln $\{A_n\}$ und R-Modulhomomorphismen $\theta_{n+1} : A_{n+1} \to A_n$ definieren wir den *inversen Limes*

$$\varprojlim A_n := \left\{ (a_n) \in \prod_{i=1}^{\infty} A_n \mid a_n = \theta_{n+1}(a_{n+1}) \right\}.$$

Sei nun $\mathcal{O}$ ein Dedekindring, K sein Quotientenkörper, und $\mathfrak{m} \subseteq \mathcal{O}$ ein maximales Ideal. Zeigen Sie

$$Q(\varprojlim \mathcal{O}/\mathfrak{m}^n) \cong K_{\mathfrak{m}},$$

d.h. der Quotientenkörper des inversen Limes der Restklassenringe $\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n$ ist isomorph zur Komplettierung von K am Betrag zum maximalen Ideal $\mathfrak{m}$.
Stichworte Kommutative Algebra: Komplettierung