Übungen zur Vorlesung "Algebraische Zahlentheorie" WS 2009/10 Blatt 11

Ausgabe: 14.01.2010, **Abgabe:** 21.01.2010

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws09/azt.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 11.1: Bestimmen Sie für $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ den Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Überlegen Sie sich (analog zum Beispiel im Skript Seite 59), welche Primzahlen in der Erweiterung $K/\mathbb{Q}$ verzweigen.

(ii) Überlegen Sie sich, daß ein Element $\alpha \in K$ genau dann ganz ist, wenn $\alpha \in K_v$ ganz ist für alle Beträge $|\cdot|_v$, die Beträge $|\cdot|_p$ fortsetzen.

(iii) Zeigen Sie, daß ein Element $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$ genau dann ganz ist, wenn $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

(8 Punkte)

Aufgabe 11.2:

(i) Sei $\phi : A \to B$ ein Homomorphismus von Dedekindringen. Zeigen Sie, daß ϕ einen Homomorphismus der Klassengruppen $\mathrm{Cl}(A) \to \mathrm{Cl(B)}$ induziert.

(ii) Sei L/K eine Galoiserweiterung globaler Körper. Zeigen Sie, daß die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/K)$ vermittels der Homomorphismen aus (i) auf der Klassengruppe $\mathrm{Cl}(\mathcal{O}_L)$ operiert.

(iii) Sei L/K eine Galoiserweiterung globaler Körper. Zeigen Sie, daß die Elemente im Bild des Homomorphismus $\mathrm{Cl}(\mathcal{O}_K) \to \mathrm{Cl}(\mathcal{O}_\mathrm{L})$ aus (i) invariant unter der Operation von $\mathrm{Gal}(L/K)$ aus (ii) sind.

(6 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe Kommutative Algebra 11.3: Seien $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{Z}_p[t_1, \ldots, t_n]$ Polynome. Wir bezeichnen mit

$$\pi : \mathbb{Z}_p[t_1, \ldots, t_n] \to \mathbb{F}_p[t_1, \ldots, t_n]$$

die Abbildung, die von der Quotienten-Abbildung $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{F}_p$ induziert wird. Zeigen Sie: Wenn die $\pi(f_i)$ eine gemeinsame Nullstelle $x_0 \in (\mathbb{F}_p)^n$ haben und in $\mathbb{F}_p$

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial t_j} \right) (x_0) \neq 0$$

ist, dann existiert eine gemeinsame Nullstelle $\widetilde{x}_0 \in (\mathbb{Z}_p)^n$ der f_i mit $\pi(\widetilde{x}_0) = x_0$.

(6 Punkte)

Stichworte Kommutative Algebra: Henselsches Lemma