Übungen zur Vorlesung "Algebraische Zahlentheorie" WS 2009/10 Blatt 12

Ausgabe: 21.01.2010, **Abgabe:** 28.01.2010

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws09/azt.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 12.1: Zeigen Sie, dass der Ganzheitsring von $\mathbb{Q}(i, \sqrt{-5})$ ein Hauptidealring ist.

(8 Punkte)

Aufgabe 12.2: Bestimmen Sie die Klassenzahl von $\mathbb{Q}(\sqrt{34})$.

(8 Punkte)

Aufgabe Kommutative Algebra 12.3: Sei R ein Dedekindring. Ein endlich erzeugter R-Modul M heißt *lokal frei vom Rang n*, wenn für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subseteq R$ der Modul $M_{\mathfrak{m}}$ ein freier $R_{\mathfrak{m}}$-Modul vom Rang n ist. Lokal freie R-Moduln vom Rang 1 heißen auch *invertierbare Moduln*.

(i) Wir setzen voraus, daß die Isomorphieklassen von invertierbaren R-Moduln eine Menge bilden. Zeigen Sie, daß das Tensorprodukt $(- \otimes_R -)$ auf den Isomorphieklassen von invertierbaren R-Moduln eine Gruppenstruktur induziert. Diese Gruppe heißt *Picard-Gruppe* von R und wird mit $\mathrm{Pic}(R)$ bezeichnet.

Sie dürfen dazu die Rechenregeln für das Tensorprodukt aus der Literatur zitieren.

(ii) Zeigen Sie, daß gebrochene Ideale invertierbare Moduln sind.

(iii) Zeigen Sie, daß die Zuordnung in (ii) einen Gruppenhomomorphismus $\mathrm{Cl}(R) \to \mathrm{Pic}(R)$ liefert.

(iv) Zeigen Sie, daß der Homomorphismus aus (iii) ein Isomorphismus ist.

Stichworte Kommutative Algebra: Tensorprodukt