Übungen zur Vorlesung
“Algebraische Zahlentheorie”
WS 2009/10 Blatt 13

Ausgabe: 28.01.2010, **Abgabe:** 04.02.2010

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws09/azt.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 13.1: Sei $K = \mathbb{Q}(\theta)$, wobei θ eine Wurzel von $x^3 - 2x - 3$ ist. Bestimmen Sie ein multiplikatives Inverses zu $(-\theta^2 - 2\theta - 2)$ in $\mathcal{O}_K$.

(2 Punkte)

Aufgabe 13.2: Sei $d > 0$ eine quadratfreie natürliche Zahl. Die Gleichung $x^2 - dy^2 = 1$ wird Pellsche Gleichung genannt.

(i) Zeigen Sie, daß diese Gleichung unendlich viele Lösungen in den ganzen Zahlen hat.

(ii) Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Zeigen Sie, daß man aus den ganzzahligen Lösungen der Gleichung $x^2 - dy^2 = \pm 4$ alle Einheiten von $\mathcal{O}_K$ erhält. Begründen Sie insbesondere, warum die ganzzahligen Lösungen von $x^2 - dy^2 = \pm 1$ im Allgemeinen nicht alle Einheiten liefern.

(8 Punkte)

Aufgabe 13.3: Sei K ein globaler Körper, $x \in \mathcal{O}_K$ ein ganzes Element. Zeigen Sie: x ist eine Einheit genau dann, wenn x eine Einheit in $\mathcal{O}_{K_v}$ ist für alle Beträge $|\cdot|_v$, die zu Primidealen von $\mathcal{O}_K$ gehören.

(4 Punkte)