Übungen zur Vorlesung
"Algebraische Zahlentheorie"
WS 2009/10 Blatt 14

Ausgabe: 04.02.2010, **Abgabe:** 11.02.2010

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws09/azt.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 14.1: Zeigen Sie, dass die Gleichung $a^2 - 47b^2 = \pm 19$ unendlich viele Lösungen in den ganzen Zahlen hat. Betrachten Sie dazu den Ganzheitsring von $K = \mathbb{Q}(\sqrt{47})$:

(a) Geben Sie die Minkowski-Schranke für $\mathcal{O}_K$ an, und bestimmen Sie alle Ideale von $\mathcal{O}_K$, deren Norm unterhalb der Minkowski-Schranke liegt.

(b) Folgern Sie aus (a), dass die Klassenzahl von $\mathbb{Q}(\sqrt{47})$ gleich 1 ist.

(c) Geben Sie die Primidealfaktorisierung von (19) in $\mathcal{O}_K$ an.

(d) Folgern Sie aus (b) und (c), dass in $\mathcal{O}_K$ ein Element mit der Norm ± 19 existieren muss. Wie erhält man die Lösungen der Ausgangsgleichung?

(e) Folgern Sie aus (d), dass es unendlich viele Lösungen dieser Gleichung geben muss.

(f) Was können Sie über das Vorzeichen der 19 aussagen?

(14 Punkte)

Aufgabe 14.2: Sei L/K eine Erweiterung globaler Körper, v ein Betrag von K, und $w_1, \ldots, w_n$ die Beträge von L, die K fortsetzen. Die Beträge w_i seien wie folgt normiert:

$$|x|_w = |x|_v^{[L_w:K_v]} \text{ für alle } x \in K.$$

Zeigen Sie:

$$|N_{L/K}(x)|_v = \prod_{w_i|v} |x|_{w_i}.$$

(6 Punkte)