Übungen zur Vorlesung
“Algebraische Zahlentheorie”
WS 2009/10 Blatt 5

Ausgabe: 19.11.2009, **Abgabe:** 26.11.2009

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws09/azt.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 5.1: Sei R ein Dedekindring und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \subseteq I$ Ideale. Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

$$\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}), \qquad \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cap (\mathfrak{a} + \mathfrak{c})$$

(4 Punkte)

Aufgabe 5.2: Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$, und $\mathfrak{m} = (2, \sqrt{-5} + 1) \subseteq \mathcal{O}_K$. Geben Sie eine $\mathbb{Z}$-Basis des folgenden gebrochenen Ideals an:

$$\mathfrak{m}' = \{\lambda \in K \mid \lambda \mathfrak{m} \subseteq \mathcal{O}_K\}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 5.3: Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Geben Sie die Primidealfaktorisierungen der Ideale (7) und (31) in $\mathcal{O}_K$ an. Dabei dürfen Sie annehmen, daß $(1, \sqrt[3]{2}, (\sqrt[3]{2})^2)$ eine Basis von $\mathcal{O}_K$ ist. Erläutern Sie, wo genau diese Voraussetzung benutzt wird.

(4 Punkte)

Aufgabe Kommutative Algebra 5.4: Zeigen Sie, daß ein Dedekindring mit endlich vielen Primidealen schon ein Hauptidealring ist.
Hinweis: Der Erzeuger eines beliebigen Ideals $\mathfrak{a}$ ergibt sich aus dem chinesischen Restsatz angewendet auf die Primidealfaktorisierung.

(4 Punkte)

Stichworte Kommutative Algebra: chinesischer Restsatz für beliebige Ringe.