Übungen zur Vorlesung
"Algebraische Zahlentheorie"
WS 2009/10 Blatt 6

Ausgabe: 26.11.2009, **Abgabe:** 03.12.2009

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws09/azt.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 6.1:

(i) Sei L/K eine Erweiterung globaler Körper, und $\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K$ die entsprechende Erweiterung der Ganzheitsringe. Sei $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_L$ ein Ideal. Zeigen Sie, daß für die Idealnorm $N(\mathfrak{a} \cap \mathcal{O}_K)$ ein Teiler der Idealnorm $N(\mathfrak{a})$ ist.

(ii) Benutzen Sie Teil (i), um alle Ideale in $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{43})}$ zu bestimmen, die Norm höchstens 7 haben.

(6 Punkte)

Aufgabe 6.2: Ein Ring A heißt *artinsch*, wenn jede absteigende Kette von Idealen $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ stationär wird.
Sei nun R ein Dedekindring, $I \subseteq R$ ein von (0) verschiedenes Ideal. Zeigen Sie, daß R/I ein artinscher Ring ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 6.3: Für $p \neq 2$ betrachten wir die Erweiterung

$$K = \mathbb{F}_p(t)(\sqrt{t}) = \mathbb{F}_p(t)[X]/(X^2 - t).$$

Bestimmen Sie das Maximalspektrum $\operatorname{Spm} \mathcal{O}_K$ von $\mathcal{O}_K$. Diskutieren Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede zum Beispiel aus der Vorlesung.

(6 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe Kommutative Algebra 6.4: (Chinesischer Restsatz) Sei R ein Ring, und $I_1, \ldots, I_n \subseteq R$ Ideale, so daß für $i \neq j$ stets $I_i + I_j = R$ gilt. Dann induziert der kanonische Homomorphismus $R \to \prod_{i=1}^n R/I_i$ einen Isomorphismus

$$R/(\cap_{i=1}^n I_i) \to \prod_{i=1}^n R/I_i$$

(4 Punkte)

Stichworte Kommutative Algebra: Tensorprodukt