Übungen zur Vorlesung
"Algebraische Zahlentheorie"
WS 2009/10 Blatt 7

Ausgabe: 03.12.2009, **Abgabe:** 10.12.2009

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws09/azt.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 7.1: Wir betrachten den Zahlkörper $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5}, i)$.

(i) Zeigen Sie, daß die folgenden Elements eine Basis des Ganzheitsrings $\mathcal{O}_K$ bilden :

$$1, i, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, i \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Betrachten Sie dazu die Norm $N_{K/\mathbb{Q}(i)}$ eines Elements in $\mathcal{O}_K$ und gehen Sie wie im Beweis von Satz 1.3 vor.

(6 Punkte)

(ii) Zeigen Sie

$$D\left(1, i, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, i \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 400.$$

(3 Punkte)

(iii) Benutzen Sie die Gradformel, um zu zeigen, daß die Erweiterung $K/\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ unverzweigt ist. Es kann hilfreich sein, auch den Zwischenkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ zu betrachten.

(4 Punkte)

(iv) Zeigen Sie, daß

$$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Bestimmen Sie alle Zwischenkörper.

(3 Punkte)

(v) Berechnen Sie für die Ideale (2), (3) und (5) Zerlegungs- und Trägheitsgruppe in der Erweiterung $K/\mathbb{Q}$.

(6 Punkte)