Übungen zur Vorlesung
“Algebraische Zahlentheorie”
WS 2009/10 Blatt 9

Ausgabe: 17.12.2009, **Abgabe:** 07.01.2010

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws09/azt.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 9.1: Entscheiden Sie (ohne Begründung), ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Für jede richtige Entscheidung gibt es einen Punkt.
Diese Aufgabe ist als Wissenstest gedacht. Versuchen Sie zuerst, die Aufgabe allein und ohne Skript zu bearbeiten. Überprüfen Sie dann Ihre Lösung mit Hilfe des Skripts.

	Wahr	**Falsch**
Sei R ein Ring. Jeder Untermodul eines freien Moduls ist frei.	☐	☐
Ein Ring mit Krull-Dimension Null ist ein Körper.	☐	☐
Jedes von 0 verschiedene Primideal eines Dedekindrings ist maximal.	☐	☐
Die Menge $$\{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha \in \mathcal{O}_K \text{ für einen Zahlkörper } K/\mathbb{Q}\}$$ ist eine ganze Ringerweiterung von $\mathbb{Z}$.	☐	☐
Die Menge $$\{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha \in \mathcal{O}_K \text{ für einen Zahlkörper } K/\mathbb{Q}\}$$ ist ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul.	☐	☐
Eine Ringerweiterung $R \to S$ ist genau dann ganz, wenn S als R-Modul endlich erzeugt ist.	☐	☐
Sei R ein Ring. Jeder Untermodul eines endlich erzeugten R-Moduls ist endlich erzeugt.	☐	☐
Sei R ein Dedekindring. Jedes Ideal von R ist endlich erzeugt.	☐	☐

	Wahr	**Falsch**
Die Diskriminante eines Zahlkörpers ist immer quadratfrei.	☐	☐
Sei K ein Zahlkörper. Der Ring $\mathcal{O}_K$ ist genau dann ein freier $\mathbb{Z}$-Modul, wenn $\mathcal{O}_K$ ein Hauptidealring ist.	☐	☐
Sei L/k eine Körpererweiterung, $\alpha \in L$. Das Minimalpolynom von α und das charakteristische Polynom von α stimmen überein.	☐	☐
Sei k ein Körper der Charakteristik p. Jede Erweiterung L von k mit $p \nmid [L : k]$ ist separabel.	☐	☐
Jedes von Null verschiedene Ideal eines Dedekindrings läßt sich eindeutig in Primideale faktorisieren.	☐	☐
Jedes Element eines Dedekindrings läßt sich eindeutig in irreduzible Elemente faktorisieren.	☐	☐
Sei $K/\mathbb{Q}$ ein Zahlkörper. Ein Ideal in $\mathcal{O}_K$ ist prim, wenn seine Idealnorm in $\mathbb{Z}$ eine Primzahl ist.	☐	☐
Sei $K/\mathbb{Q}$ ein Zahlkörper. Die Idealnorm eines Primideals ist eine Primzahl.	☐	☐
Die Klassenzahl von $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-5})}$ ist größer als 1.	☐	☐
Die Klassenzahl von $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}$ ist gleich 1.	☐	☐
Ein diskreter Bewertungsring ist ein Hauptidealring.	☐	☐
Für einen Zahlkörper K gibt es nur endlich viele Primideale $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_K$ mit $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (p)$.	☐	☐
Sei $K/\mathbb{Q}$ ein Zahlkörper. Dann hat $\mathcal{O}_K$ unendlich viele Primideale.	☐	☐
Sei $K/\mathbb{Q}$ ein Zahlkörper. Für gegebenes $n \in \mathbb{Z}$ gibt es nur endlich viele Elemente mit Norm n.	☐	☐
Die Lokalisierung eines Dedekindrings ist wieder ein Dedekindring.	☐	☐
Ein Zahlkörper vom Grad 2k+1 besitzt nur die Einheitswurzeln 1 und -1.	☐	☐
Jeder quadratische Zahlkörper ist Teilkörper eines zyklotomischen Körpers.	☐	☐
In $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ sind alle Primideale $(p) \subseteq \mathbb{Z}$ mit $p \nmid n$ vollständig zerlegt.	☐	☐
Es gibt einen Zahlkörper $K/\mathbb{Q}$, der alle Einheitswurzeln enthält.	☐	☐
Für jede Primzahl p gibt es einen Zahlkörper K, so daß p in $\mathcal{O}_K$ verzweigt ist.	☐	☐

Bonus-Aufgabe 9.2: Zeigen Sie, daß jede unverzweigte Erweiterung L/K von lokalen Körpern abelsch ist.
Hinweis: Zeigen Sie, daß jede unverzweigte Erweiterung von lokalen Körpern durch Adjunktion von Einheitswurzeln entsteht.

(8 Punkte)