Proseminar: Projektive Geomtrie

Wintersemester 2009/2010

Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter
Betreuerin: Sabine Lechner

Ort und Zeit: SR 127, Donnerstag, 11-13 Uhr

Inhalt: Zwei ebene Geraden schneiden sich entweder in einem Punkt, oder sie sind parallel. Das gleiche Phänomen tritt auch in höheren Dimensionen auf und führt dazu, dass in vielen geometrischen Sätzen Fallunterscheidungen nötig sind. Diese verschwinden, wenn man von der affinen Geomtrie zur projektiven übergeht. Wir ergänzen die Ebene durch die unendlich ferne Gerade. Sie enthält für jede Schar von parallelen Geraden einen Punkt, ihren Schnittpunkt im Unendlichen. Was etwas mysteriös klingt, hat eine einfache mathematischen Beschreibung. Projektive Räume sind ein zentraler Gegenstand der Topologie, Differentialgeomtrie und algebraischen Geometrie. Wir wollen ihre grundlegenden Eigenschaften kennenlernen.

Organisatorisches: Als Prüfungsleistung zählt der eigene Vortrag, darber hinaus wird erwartet, dass jeder Teilnehmer zu den Vortragsterminen anwesend ist. Bei inhaltlichen und organisatorischen Fragen in der Vorbereitungsphase vereinbaren Sie bitte einen Termin mit der Betreuerin. Sie sollten sich mindestens einmal nach der Einarbeitungsphase und spätestens zwei Wochen vor Ihrem Vortrag mit der Betreuerin über den Inhalt ihres Vortrags absprechen.

1.Vortrag (Wiederholgung der affinen Geometrie). Affiner Raum, Vektorialisierung, affiner Unterraum, Schnitt- und Verbindungsraum, Position zweier Unterräume, affine Bewegung, affine Transformation, Teilverhältnis, Kollineation, Satz von Menelaüs
Lit.: [1] Chap. I, [4] Abschnitt 3.4, [5] Abschnitte 1.0-1.3

2. Vortrag (Hauptsatz der affinen Geomtrie, Sätze von Pappos und Desargues). Haupsatz inkl. dem Beweis des Hauptlemmas, Theoreme von Pappos und Desargues mit Beweis über den Satz von Menelaüs
Lit.: [4] Abschnitte 3.5,3.6 [5] Abschnitt 1.3

3. Vortrag (Projektive Räume). Einleitung/Motivation, projektiver Raum, homog. Koordinaten, proj. Unterräume, proj. Räume als Abschluss affiner Räume, Dimensionsformel, Lage proj. Unterräume
Lit.: [1] Abschnitte V.1, V.2, [5] Abschnitte 3.0,3.1

4. Vortrag (Beispiele). $\mathbb{RP}^1, \mathbb{CP}^1, \mathbb{RP}^2$, stereographische Projektion, Zentralprojektion, Exkurs: Topologie, Topologie der reellen proj. Ebene, $\mathbb{RP}^2$ kompakt, wegzusammenhängend und nicht orientierbar
Lit.: [1] Abschnitt V1, Aufgaben V.3, V.47, [3] Abschnitt VI.3, [4] Abschnitt 6.7, [7] Abschnitte 1.1, 1.5, 1.6, 1.8, 3.1, [9] Abschnitt 12.1

5. Vortrag (proj. Abbildungen). Proj. Abb, Projektivität, proj. Gruppe, $\mathbb{P}(V) \setminus H$ affiner Raum, proj. unabh., proj. Basen, Existensz-und Eind.satz
Lit.: [1] Abschnitt V.5, [3] Abschnitt VI.4, [5] Abschnitt 3.2

6. Vortrag (proj. Koordinatensystem, Doppelverhältnis I). Proj. Koordsys., Beschreibung von Projektivitäten durch Matrizen, Beschreibung von proj. Unterr. durch Gleichungen, Homogenisieren und Dehomog von Gleichungssys., Motivation Doppelverhältnis, Invarianz des DV
Lit.: [1] Abschnitt V.6, [3] Abschnitt VI.4, [5] Abschnitte 3.2, 3.3

7. Vortrag (Doppelverhältnis II, Theoreme von Pappos und Desargues II). Berechung des DV, DV als Verhältnis von Teilverhältnissen, Konstruktion des 4ten harmonischen Punktes, Theoreme von Pappos und Desargues mit Beweisen über DV, Semiprojektivität
Lit.: [5] Abschnitt 3.3

8. Vortrag (Hauptsatz der proj. Geometrie, Dualität). Hauptsatz der proj. Geom. und daraus folgend der Hauptsatz der aff. Geom., Dualitätsprinzip, Korrelation, Hyperebenenbüschel
Lit.: [1] Abschnitt V.4, [5] Abschnitte 3.3, 3.4

9. Vortrag (Axiomatischer Zugang). Axiome der projektiven Geometrie, Unter welcher Bedingung führt dies zu dem projektiven Raum den wir kennen?
Lit.: [2] Chap. 1, Chap. 3

10. Vortrag (Quadriken in proj. Räumen I). Quadrik, Bsp. Kreis, Hyp, Parabel als Urbild der kan. Einbettung, Zusammenhang Quadrik-symm. Bil.form, Invarianz von Quadriken, geom Äquivalenz, Satz über proj. Hauptachsentransformation (Bew.idee), Vorzeichenregel von Descartes am Bsp., Lemma für Klassifkation
Lit.: [5] Abschnitt 3.5

11. Vortrag (Quadriken in proj. Räumen II). Klassifikation für $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$, Normalformen für $\mathbf{R}\mathbb{P}^2$ und $\mathbb{RP}^3$, genauere Betrachtung der Kugelgl. im $\mathbb{RP}^3$, reguläre Quadriken, Polare, Tangente inkl. Satz, Definition

von nicht entartet
Lit.: [5] Abschnitt 3.5

12. Vortrag (Satz von Pascal, affine Quadriken). Satz von Pascal (Bew.idee), Klassifikationssatz affiner Quadriken mit proj. Geometrie
Lit.: [5] Abschnitte 1.4, 3.5

13. Vortrag (Satz von Bézout). Parametrisierung, Bézout für den Fall, dass eine der beiden Kurven eine Gerade oder nichtdegenierte Quadrik ist, Quadrik ist durch 5 Pkte bestimmt, falls je 4 Punkte nicht kollinear sind, allg. Bézout erklären
Lit.: [6] Abschnitt 2.7, [8] Abschnitte I 1.7-1.11

14. Vortrag (Satz vom neunten Punkt). Lineare Systeme, Spezialfall des Nullstellensatzes, Satz vom neunten Punkt, nochmal Satz von Pascal als Anwendung
Lit.: [8] Abschnitte I 2.4-2.7, 2.11

15. Vortrag (Gruppenstruktur auf der elliptischen Kurve). Beweis der Gruppenstruktur, vereinfachtes Gruppengesetz, falls die elliptische Kurve einen Wendepunkt besitzt
Lit.: [8] Abschnitte I 2.8, 2.9, 2.12, 2.13,

Literaturverzeichnis

[1] Michle Audin. *Geometry*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, Berlin, 1998.

[2] Albrecht Beutelspacher and Ute Rosenbaum. *Projective geometry: from foundations to applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[3] Theodor Bröcker. *Lineare Algebra und analytische Geometrie*. Grundstudium Mathematik. [Basic Study of Mathematics]. Birkhäuser Verlag, Basel, 2003. Ein Lehrbuch für Physiker und Mathematiker. [A textbook for physicists and mathematicians].

[4] H. S. M. Coxeter and S. L. Greitzer. *Zeitlose Geometrie*. Klett Studienbücher Mathematik. [Klett Textbooks in Mathematics]. Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1983. A translation of ıt Geometry revisited, Translated from the English by Rolf Müller, Herbert Rauck and Hartmut Wellstein.

[5] Gerd Fischer. *Analytische Geometrie*. Rowohlt Taschenbuch Verlag, Reinbek, 1978. Ro Ro Ro Vieweg, Band 35. Mathematik Grundkurs.

[6] Gerd Fischer. *Ebene algebraische Kurven*. Vieweg Verlagsgesellschaft mbH, Wiesbaden, 1994. Vieweg, Aufbaukurs Mathematik.

[7] Klaus Jänich. *Topologie*. Springer-Verlag, Berlin, eighth edition, 2005.

[8] Miles Reid. *Undergraduate algebraic geometry*, volume 12 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[9] Heiner Zieschang. *Lineare Algebra und Geometrie*. Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks]. B. G. Teubner, Stuttgart, 1997.