Übungen zur Vorlesung
“Arithmetische Geometrie”
WS 2010/11 Blatt 11

Ausgabe: 19.01.2011, **Abgabe:** 26.01.2011

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws10/arithmie.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 11.1: Sei k ein Körper der Charakteristik $\neq 2$. Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$k[X,Y]/(Y^2 - X^2(X+1)) \to (k[Z,W]/(ZW))[(Z+2)^{-1}, (W+2)^{-1}] :$$

$X \mapsto (Z+1)^2 - 1 + (W+1)^2 - 1, Y \mapsto (Z+1)((Z+1)^2-1) - (W+1)((W+1)^2-1)$

étale ist. Gibt es eine nichttriviale endliche étale Abbildung mit Bildraum $\operatorname{Spm}(k[X,Y]/(Y^2 - X^2(X+1)))$?

(6 Punkte)

Aufgabe 11.2: Sei X eine irreduzible Varietät über $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, daß es eine offene, nichtleere Untervarietät $U \subseteq X$ gibt, die glatt ist.
Hinweis: Betrachten Sie zuerst den Differentialmodul des Funktionenkörpers.

(6 Punkte)

Aufgabe 11.3: Sei A ein Hauptidealring, $\pi \in A$ ein Primelement und $f \in A[X]$ ein Polynom. Sei $\overline{a} \in A/\pi$ eine einfach Nullstelle von $\overline{f} \in A/\pi[X]$, d.h. $\overline{f}(\overline{a}) = 0$ und $\overline{f}'(\overline{a}) \neq 0$. Dann existiert für jedes n ein Element $a_n \in A/\pi^n$ mit $f(a_n) \in (\pi^n)$.
Bemerkung: Beispiele für diese Situation sind lokale Ringe von glatten Kurven.

(6 Punkte)

Aufgabe 11.4: Sei k ein Körper, A eine endlich-dimensionale kommutative k-Algebra. Zeigen Sie

$$A \cong \prod_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spm} A} A_{\mathfrak{p}}.$$

(4 Punkte)