

# Übungen zur Vorlesung “Arithmetische Geometrie” WS 2010/11 Blatt 12

Ausgabe: 26.01.2011, Abgabe: 02.02.2011

---

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

<http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws10/arithmie.html>

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

---

**Aufgabe 12.1:** Sei  $\mathcal{F}$  eine Prägarbe auf dem étalen Situs  $X_{\text{ét}}$ . Zeigen Sie:  $\mathcal{F}$  ist genau dann eine Garbe, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

- (i)  $\mathcal{F}$  ist eine Garbe auf  $X_{\text{Zar}}$
- (ii) Für alle étalen  $X$ -Morphismen  $U' \rightarrow U$  mit  $U$  und  $U'$  affine Varietäten ist das Garbenaxiom aus Def. 8.4 erfüllt.

(4 Punkte)

**Aufgabe 12.2:** Sei  $k$  ein Körper,  $X$  eine  $k$ -Varietät. Leiten Sie aus Aufgabe 12.1 ab, daß die beiden Prägarben auf  $X_{\text{ét}}$

- (i)  $U \mapsto \text{Mor}(U, \text{Spm } k[t])$
- (ii)  $U \mapsto \text{Mor}(U, \text{Spm } k[t, t^{-1}])$

Garben in der étalen Topologie sind.

(6 Punkte)

**Aufgabe 12.3:** Sei  $k$  ein Körper,  $X$  eine  $k$ -Varietät. Wir bezeichnen mit  $\mathbb{G}_m$  die Prägarbe aus 12.2.(b) auf  $X_{\text{ét}}$ , und mit  $(\cdot)^n : \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m$  den durch  $t \mapsto t^n$  induzierten Morphismus von Prägarben. Mit  $\mu_n$  bezeichnen wir den Kern von  $(\cdot)^n$ . Zeigen Sie unter der Voraussetzung  $\text{char } k \nmid n$ : Die Kummersequenz

$$0 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{(\cdot)^n} \mathbb{G}_m \rightarrow 0$$

ist eine exakte Sequenz von étalen Garben.  
Wie sieht die Sequenz für  $X = \text{Spm}(k)$  aus?

(6 Punkte)