# Übungen zur Vorlesung
# “Arithmetische Geometrie”
# WS 2010/11 Blatt 5

**Ausgabe:** 17.11.2010, **Abgabe:** 24.11.2010

---

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws10/arithmie.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

---

**Aufgabe 5.1:** Sei $X$ eine Varietät über $k$.

(i) Zeigen Sie, daß es eine Bijektion zwischen Morphismen $X \to \mathbb{A}^1$ und den regulären Funktionen auf $X$ gibt.

(ii) Zeigen Sie, daß eine reguläre Funktion $f$ auf $X$ genau dann 0 ist, wenn für alle Punkte $P \in X$ die Restklasse von $f$ im Restklassenkörper $\kappa(P)$ gleich 0 ist.

(4 Punkte)

**Aufgabe 5.2:** Sei $L/k$ eine Körpererweiterung. Die Zuordnung $A \mapsto (A \otimes_k L)^{\mathrm{red}}$ liefert einen Funktor von der Kategorie der endlich erzeugten reduzierten $k$-Algebren in die Kategorie der endlich erzeugten reduzierten $L$-Algebren. Dieser Funktor setzt sich auf die offensichtliche Weise zu einem Funktor von der Kategorie der Prävarietäten über $k$ in die Kategorie der Prävarietäten über $L$ fort. Für einen Morphismus $f : X \to Y$ von Prävarietäten über $k$ bezeichnen wir mit $f_L : X_L \to Y_L$ das Bild des Morphismus unter diesem Funktor.
Wir betrachten nun einen algebraischen Abschluß $\overline{k}$ von $k$. Zeigen Sie, daß ein Morphismus $f$ von Prävarietäten genau dann eine abgeschlossene Immersion ist, wenn $f_{\overline{k}}$ eine abgeschlossene Immersion ist. Folgern Sie, daß eine Prävarietät $X$ über $k$ genau dann eine Varietät ist, wenn $X_{\overline{k}}$ eine Varietät über $\overline{k}$ ist.

(4 Punkte)

(bitte wenden)

**Aufgabe 5.3:** Zeigen Sie, daß ein Morphismus $f : X \to Y$ von Prävarietäten genau dann separiert ist, wenn es eine offene Überdeckung $Y_i, i \in I$ von $Y$ gibt, so daß für alle $i \in I$ die Morphismen $f^{-1}(Y_i) \to Y_i$ separiert sind.

(4 Punkte)

**Aufgabe 5.4:** Zeigen Sie, daß abgeschlossene $k$-Untervarietäten von $\mathbb{A}^m \times \mathbb{P}^n$ genau durch Polynome $g(X, Y) \in k[X_1, \ldots, X_m, Y_0, \ldots, Y_n]$ gegeben sind, die in den $Y_i$ homogen sind.

(4 Punkte)