Übungen zur Vorlesung
"Algebraische Zahlentheorie"
WS 2011/12 Blatt 11

Ausgabe: 19.01.2012, **Abgabe:** 26.01.2012

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws11/azt/azt.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.

Aufgabe 11.1: Sei p eine ungerade Primzahl und $K = \mathbb{Q}(\zeta_p + \zeta_p^{-1})$.

(i) Zeigen Sie durch Angabe eines Minimalpolynoms von ζ_p, daß die Erweiterung $\mathbb{Q}(\zeta_p)/K$ den Grad 2 hat.

(ii) Zeigen Sie, daß alle Einbettungen $\sigma : K \to \mathbb{C}$ reell sind.

K ist der maximale total reelle Teilkörper von $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ und $\mathcal{O}_K^\times \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\zeta_p)}^\times$ hat endlichen Index.

(5 Punkte)

Aufgabe 11.2: Zeigen Sie $\gamma_2 = \sqrt{\frac{4}{3}}$.

(5 Punkte)

Aufgabe 11.3:

(i) Sei A ein Ring. Eine Teilmenge $S \subseteq A \setminus \{0\}$ heisst *multiplikativ abgeschlossen* wenn $1 \in S$ und für alle $x, y \in S$ auch $x \cdot y \in S$ ist. Sei M ein A-Modul und $S \subseteq A$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $M \times S$ durch $(m, s) \sim (m', s')$ genau dann wenn ein $s'' \in S$ existiert, so daß gilt $s''(s'm - sm') = 0$.

Zeigen Sie, daß die Menge $S^{-1}M$ der Äquivalenzklassen einen A-Modul bildet, und daß $M \to S^{-1}M : m \mapsto (m, 1)$ ein A-Modul-Homomorphismus ist.

(ii) Sei A ein beliebiger Ring, $S \subseteq A$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Zeigen Sie, daß eine Bijektion existiert zwischen (1) der Menge der Primideale von $S^{-1}A$ und (2) der Menge derjenigen Primideale von A, die zu S disjunkt sind.

(10 Punkte)