Übungen zur Vorlesung
“Algebraische Zahlentheorie”
WS 2011/12 Blatt 13

Ausgabe: 02.02.2012, **Abgabe:** 09.02.2012

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws11/azt/azt.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.

Aufgabe 13.1: Sei L der Zerfällungskörper des Polynoms $X^3 - X + 1$. Für welche Zwischenkörper K von $L/\mathbb{Q}$ ist L/K unverzweigt? (Das ist als Pari/GP-Aufgabe gedacht. Die Aufgabe kann auch von Hand bearbeitet werden, ist dann aber deutlich mehr Punkte wert.)

(6 Punkte)

Aufgabe 13.2: Sei L/K eine Galoiserweiterung mit Zwischenkörper F, sei $\mathfrak{P} \subseteq \mathcal{O}_L$ ein Primideal und f der Restklassengrad von $\mathfrak{P} \cap F$ über K. Dann gelten die folgenden Rechenregeln für den Frobenius-Automorphismus:

(i) $(\mathfrak{P}, L/F) = (\mathfrak{P}, L/K)^f$.

(ii) Wenn F/K auch eine Galoiserweiterung mit zugehörigem Homomorphismus $\phi : \mathrm{Gal}(L/K) \to \mathrm{Gal}(F/K)$ ist, dann ist

$$\phi((\mathfrak{P}, L/K)) = (\mathfrak{P} \cap F, F/K).$$

(7 Punkte)

Aufgabe 13.3:

(i) Zeigen Sie, dass genau dann in $\mathbb{F}_q$ eine primitive p-te Einheitswurzel existiert, wenn $q \equiv 1 \mod p$.

(ii) Sei q eine Primzahl und n eine natürliche Zahl mit $q \nmid n$. Benutzen Sie Teil (i), um Trägheitsgrad und Verzweigungsindex von (q) in $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$ zu bestimmen.

(iii) Wie viele Primfaktoren hat (71) in $\mathbb{Q}(\zeta_{20})$? Für welche n ist 59 in $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ vollständig zerlegt?

(7 Punkte)