Übungen zur Vorlesung
“Algebraische Zahlentheorie”
WS 2011/12 Blatt 14

Ausgabe: 09.02.2012, **Abgabe:** 16.02.2012

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws11/azt/azt.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.

Aufgabe 14.1: Zeigen Sie, daß die Gleichung $x^2 = 2$ eine Lösung in $\mathbb{Z}_7$ hat, indem Sie induktiv zeigen, daß Lösungen in $\mathbb{Z}/(7^{n+1})$ existieren. Geben Sie die ersten 3 Terme der 7-adischen Entwicklung der beiden Lösungen an.

(4 Punkte)

Aufgabe 14.2: Seien p, q verschiedene Primzahlen mit $q \nmid (p-1)$. Benutzen Sie das Henselsche Lemma, um zu zeigen, daß die Gleichung $x^q + y^q = z^q$ eine Lösung in $\mathbb{Z}_p$ hat.

(4 Punkte)

Aufgabe 14.3: Sei K ein Körper und $p(X) \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom. Bestimmen Sie die Komplettierung des Funktionenkörpers $K(X)$ bezüglich des Absolutbetrages, der zum Primideal $(p(X)) \subseteq K[X]$ gehört. Wie sieht in der Komplettierung der Bewertungsring $\mathcal{O}$ und seine Einheitengruppe $\mathcal{O}^\times$ aus?

(6 Punkte)

Aufgabe 14.4: Sei K ein Zahlkörper.

(i) Zeigen Sie, daß ein Element $x \in K$ genau dann ganz ist, wenn für alle endlichen Stellen v von K gilt $v(x) \geq 0$.

(ii) Zeigen Sie, daß ein ganzes Element $x \in \mathcal{O}_K$ genau dann eine Einheit ist, wenn für alle endlichen Stellen v von K das Element x_v eine Einheit in $\mathcal{O}_{K_v}$ ist, also $v(x) = 0$ ist.

(6 Punkte)