# Übungen zur Vorlesung
# “Algebraische Zahlentheorie”
# WS 2011/12 Blatt 3

**Ausgabe:** 10.11.2011, **Abgabe:** 17.11.2011

---

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws11/azt/azt.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.

---

**Aufgabe 3.1:** Sei $K(\theta)/K$ eine endliche separable Körpererweiterung, und seien $\sigma_1, \ldots, \sigma_n : K(\theta) \to \overline{K}$ die verschiedenen $K$-Einbettungen von $K(\theta)$ in einen gewählten algebraischen Abschluß $\overline{K}$ von $K$. Zeigen Sie

$$D(1, \theta, \ldots, \theta^{n-1}) = \prod_{i<j} \left(\sigma_i(\theta) - \sigma_j(\theta)\right)^2 .$$

*Hinweis:* Determinanten-Formel für Vandermonde-Matrizen.

(4 Punkte)

**Aufgabe 3.2:** Wir betrachten das Polynom $f(X) = X^3 + pX + q$ und den dazugehörigen Ring $K[X]/(X^3 + pX + q)$. Berechnen Sie $D(1, X, X^2)$.

(4 Punkte)

**Aufgabe 3.3:** Sei $R$ ein noetherscher Ring, $M$ ein endlich erzeugter $R$-Modul. Dann ist $M$ noethersch.

(4 Punkte)

**Aufgabe 3.4:** Sei $K = \mathbb{Q}(\theta)$ wobei $\theta^3 - \theta^2 - 2\theta - 8 = 0$.

(i) Zeigen Sie, daß $\beta = (\theta^2 + \theta)/2$ ganz ist.

(ii) Berechnen Sie $D(1, \theta, \beta)$. Folgern Sie, daß $1, \theta, \beta$ eine Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}_K$ ist.

(iii) Zeigen Sie, daß für jedes Element $x \in \mathcal{O}_K$ die Diskriminante $D(1, x, x^2)$ gerade ist.

Insbesondere gibt es in $\mathcal{O}_K$ keine Ganzheitsbasis der Form $1, x, x^2$.

(8 Punkte)