Übungen zur Vorlesung
“Algebraische Zahlentheorie”
WS 2011/12 Blatt 4

Ausgabe: 17.11.2011, **Abgabe:** 24.11.2011

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws11/azt/azt.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.

Aufgabe 4.1: Sei θ eine Wurzel von $X^3+2X+1=0$ und $K=\mathbb{Q}(\theta)$. Zeigen Sie $\mathcal{O}_K=\mathbb{Z}[\theta]$.

(5 Punkte)

Aufgabe 4.2: Sei K ein Zahlkörper vom Grad $n=[K:\mathbb{Q}]$ und $x_1,\dots,x_n$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von K mit $x_i\in\mathcal{O}_K$. Dann gilt $D(x_1,\dots,x_n)\equiv 0$ oder $1 \mod 4$.

(5 Punkte)

Aufgabe 4.3: Sei K ein Zahlkörper vom Grad $n=[K:\mathbb{Q}]$, und θ ein ganzes primitives Element. Zeigen Sie, daß es eine Ganzheitsbasis $x_1,\dots,x_n$ gibt, die die folgenden Anforderungen erfüllt:

$$x_i=\frac{1}{\lambda_{ii}}\left(\sum_{j=1}^{i-1}\lambda_{ij}\theta^{j-1}+\theta^{i-1}\right),\quad \lambda_{ij}\in\mathbb{Z},\quad 0\le\lambda_{ij}<\lambda_{ii},$$

$$1=\lambda_{11}\mid\cdots\mid\lambda_{nn},\quad \left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_{ii}\right)^2\mid D(1,\theta,\dots,\theta^{n-1}).$$

Hinweis: Dies ist eine Konsequenz aus der Hermite-Normalform von Matrizen über $\mathbb{Z}$.

(5 Punkte)

Aufgabe 4.4: Wir bezeichnen mit

$$\Phi_n(X)=\prod_{i\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times}(x-\zeta_n^i)$$

das n-te zyklotomische Polynom. Zeigen Sie, daß $\Phi_n(X)$ ganzzahlige Koeffizienten hat und irreduzibel ist.

(5 Punkte)