Übungen zur Vorlesung "Algebraische Zahlentheorie" WS 2011/12 Blatt 5

Ausgabe: 24.11.2011, **Abgabe:** 01.12.2011

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws11/azt/azt.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.

Aufgabe 5.1: Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ und $\mathfrak{m} = (2, \sqrt{-5} + 1)$. Geben Sie eine $\mathbb{Z}$-Basis des gebrochenen Ideals $\mathfrak{m}^{-1} = \{x \in K \mid x\mathfrak{m} \subseteq \mathcal{O}_K\}$ an.

(4 Punkte)

Aufgabe 5.2: Seien A und B Ringe und $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Sei $a \in A$ nilpotent. Dann ist $a \in \mathfrak{p}$ für alle Primideale $\mathfrak{p}$.

(ii) Sei $\mathfrak{p} \subseteq B$ ein Primideal. Dann ist $f^{-1}(\mathfrak{p})$ ein Primideal.

(iii) Geben Sie ein Beispiel dafür an, daß das Urbild eines maximalen Ideals nicht notwendigerweise ein maximales Ideal ist.

(iv) Sei $I \subseteq A$ ein Ideal. Dann gibt es eine bijektive ordnungserhaltende Abbildung zwischen der Menge der Ideale von A/I und der Menge der Ideale von A, die I enthalten.

(v) Zeigen Sie, daß (iv) auch für Primideale gilt.

(10 Punkte)

Aufgabe 5.3:

(i) Sei R ein Ring, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ Ideale in R. Zeigen Sie $\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c})$.

(ii) Sei R ein Dedekind-Ring, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ Ideale in R. Zeigen Sie

$$\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}), \qquad \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cap (\mathfrak{a} + \mathfrak{c}).$$

(6 Punkte)