Übungen zur Vorlesung
“Algebraische Zahlentheorie”
WS 2011/12 Blatt 9

Ausgabe: 22.12.2011, **Abgabe:** 10.01.2012

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws11/azt/azt.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.

Aufgabe 9.1: Zeigen Sie, dass die Gleichung $a^2 - 47b^2 = \pm 19$ Lösungen in den ganzen Zahlen hat. Betrachten Sie dazu den Ganzheitsring von $K = \mathbb{Q}(\sqrt{47})$:

(a) Geben Sie die Minkowski-Schranke für $\mathcal{O}_K$ an, und bestimmen Sie alle Ideale von $\mathcal{O}_K$, deren Norm unterhalb der Minkowski-Schranke liegt.

(b) Folgern Sie aus (a), dass die Klassenzahl von $\mathbb{Q}(\sqrt{47})$ gleich 1 ist, indem Sie ein Element mit der Norm 2 finden.

(c) Geben Sie die Primidealfaktorisierung von (19) in $\mathcal{O}_K$ an.

(d) Folgern Sie aus (b) und (c), dass in $\mathcal{O}_K$ ein Element mit der Norm ± 19 existieren muss. Wie erhält man die Lösungen der Ausgangsgleichung?

(10 Punkte)

Aufgabe 9.2: Sei $I \subseteq \mathcal{O}_K$ ein Ideal mit $I^m = (a)$. Zeigen Sie, daß für $L = K(\sqrt[m]{a})$ gilt $I\mathcal{O}_L = (a)$. Insbesondere gibt es zu jedem Zahlkörper K eine endliche Erweiterung L/K, so daß jedes Ideal von $\mathcal{O}_K$ in $\mathcal{O}_L$ ein Hauptideal wird. Anders gesagt existiert für jedes gebrochene Ideal $I \subseteq K$ ein Element $a \in L$ mit $I = K \cap aL$.

(10 Punkte)